MATEMÁTICA BÁSICA PARA LA EDUCACIÓN SUPERIOR

FAUSTO FRANCISCO MATOS URIBE
JULIO CESAR OLAYA GUERRERO
FORTUNATO CONTRERAS CONTRERAS

ASOCIACIÓN DE BIBLIOTECÓLOGOS DEL PERÚ

Editado por la:

ASOCIACIÓN DE BIBLIOTECÓLOGOS DEL PERÚ
Calle Hipólito Bernardette Nº 106 - Barranco
Lima - Perú

Primera edición electrónica, setiembre 2020.

Libro electrónico disponible en:

https://archive.org/

ISBN: 978-612-45342-1-9

AGRADECIMIENTOS

A NUESTROS PADRES Y HERMANOS

A LOS ESTUDIANTES Y COLEGAS

Prólogo

El presente libro que se pone a consideración es el resultado de la sistematización de clases dictadas en algunas universidades del país.

Este libro trata de explicar conceptos matemáticos de manera sencilla sin dejar la parte formal.

El libro consta de trece capítulos con sus ejemplos y ejercicios propuestos.

Expresamos nuestro agradecimiento a los colegas por sus valiosos comentarios y sugerencias a la presente obra.

Los autores

Índice

Contenido		Páginas
Capítulo I	Teoría de Conjuntos	8
	Ejercicios	14
Capítulo II	Producto cartesiano	18
	Relaciones	20
	Funciones	20
	Ejercicios	21
Capítulo III	lógica proposicional	25
	Ejercicios	30
Capitulo IV	Números reales	32
Capítulo V	Ecuaciones	43
	Primer grado con una incógnita	43
	Primer grado con dos incógnitas	45
	Segundo grado	49
	Exponenciales	55
	Irracionales	57
	Ejercicios	58
Capítulo VI	Razones y proporciones	59
	Razón Aritmética	59
	Razón Geométrica	59
	Proporción Aritmética	60
	Proporción Geométrica	60
	Ejercicios	61
Capítulo VII	Logaritmos	65
	Ejercicios	66
Capítulo VIII	Sucesiones y serie de números	70
	Aritméticas	71
	Geométricas	72
Capítulo IX	Desigualdad	77
	Ejercicios	79

Capítulo X	Inecuaciones	81
	Ejercicios	84
Capitulo XI	Tanto por ciento	86
	Interés simple	89
	Interés compuesto	92
Capitulo XII	Análisis combinatorio	95
	Ejercicios	102
Capítulo XIII	Sumatorias	106
	Ejercicios	114
Anexo I, Balotarlo de preguntas		126
Anexo II, Miscelánea de ejercicios		132
Bibliografía		141

CAPÍTULO I
Teoría de conjuntos

Definición de conjunto

Es la agrupación de elementos (personas animales u objetos) que poseen una característica común. Los conjuntos pueden ser finitos e infinitos. A los conjuntos se le representa con las primeras letras mayúsculas del abecedario y a sus elementos separados por comas y encerados con llaves.

Ejemplos

$A = \{a, \quad e, \quad i, \quad o, \quad u\}$

$B = \{lunes, martes, miercoles, jueves, viernes, sabado, do \min go\}$

$C = \{2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10\}$

$D = \{1, \quad 2, \quad 3,...\infty\}$

Pertenencia

Sea A un conjunto, si un elemento x pertenece al conjunto A, se denota por $x \in A$, de lo contrario se escribe $x \notin A$

Ejemplo

$A = \{2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10\} \rightarrow 6 \in A \quad y \quad 12 \notin A$

Se lee, el elemento 6 pertenece al conjunto A y el elemento 12 no pertenece al conjunto A

Determinación de un conjunto

Un conjunto puede quedar determinado por extensión o comprensión; es por extensión, cuando se enumera uno por uno a todos sus elementos y por comprensión, cuando se menciona una propiedad común para todos sus elementos.

Ejemplo

Conjunto de los números naturales pares empezando por el 2 hasta el 10

Por extensión

$A = \{2,4,6,8,10\}$

Por comprensión

$A = \{2x / x \in N, 1 \leq x \leq 5\}$

Inclusión o subconjunto

Un conjunto A , se dice que está incluido o es subconjunto de otro conjunto B , si todo elemento de A , es también elemento de B . Se representa por $A \subset B$

Ejemplo

$A = \{1,2,3\} \quad B = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow A \subset B$

Conjuntos iguales

Sean $A \quad y \quad B$ dos conjuntos, se dice que el conjunto A es igual al conjunto B , sí $A \subset B \quad y \quad B \subset A$.

Cardinal de un conjunto

Sea A , un conjunto, su cardinal es el número de elemento que tiene dicho conjunto. Se representa por $n(A)$.

Ejemplo

$A = \{1, 3, 5\}$

Hallar su cardinal

$n(A) = 3$

El conjunto A tienen 3 elementos

Clases de conjunto

1. Conjunto nulo o vacío

Es aquel conjunto A que no tiene elemento alguno. Se representa con $A = \{\ \} = \phi$

Ejemplo

$A = \{x / x \in N , x + 1 = 0\} = \{\ \} = \phi$

2.

3.

4. Conjunto unitario

Es aquel conjunto A que tiene un único elemento

Ejemplo

$$A = \{x / x \in N\ ,\ x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{3\}$$

5. Conjunto universal

Es aquel conjunto que tiene a todos los elemento de un conjunto dado. Se representa por la letra U

Ejemplo

$$A = \{x / x \in N, x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1,2\}$$

Para el conjunto A, el conjunto universal corresponde es el conjunto de los números naturales.

$$U = \{1,2,3,...\infty\} = N$$

Nota: $A \subset$?

Operaciones con conjuntos

1. Unión

Sean $A \quad y \quad B$ dos conjuntos, la unión de A con B, es otro conjunto formado por los elementos de A y/o elementos de B. Se representa por $A \cup B$

Matemáticamente:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo

Sean los conjuntos

$$A = \{x / x \in N\ ,2 < x \leq 6\} = \{3,4,5,6\}$$

$$B = \{x / x \in N\ ,2 \leq x \leq 7\} = \{2,3,4,5,6,7\}$$

$$A \cup B = \{2,3,4,5,6,7\}$$

2. Intersección

Sean $A \quad y \quad B$ dos conjuntos, la intersección de A con B, es otro conjunto formado por los elementos comunes para $A \quad y \quad B$. Se representa por $A \cap B$

Matemáticamente:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplo
Sean los conjuntos

$A = \{x / x \in N, 2 < x \leq 6\} = \{3,4,5,6\}$

$B = \{x / x \in N, 2 \leq x \leq 7\} = \{2,3,4,5,6,7\}$

$A \cap B = \{3,4,5,6\}$

3. Diferencia de conjunto

Sean $A \quad y \quad B$ dos conjuntos, la diferencia de A con B, es otro conjunto formado solo por los elementos de A que no pertenecen a B. Se representa por $A - B$

Matemáticamente:

$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

Ejemplo
Sean los conjuntos

$A = \{x / x \in N, 2 < x \leq 6\} = \{3,4,5,6\}$

$B = \{x / x \in N, 2 \leq x \leq 7\} = \{2,3,4,5,6,7\}$

$A - B = \{\quad\} = \phi$

$B - A = \{2, 7\}$

Nota: $(A - B) = (A \cap B^c)$

4. Diferencia simétrica

Sean $A \quad y \quad B$ dos conjuntos, la diferencia simétrica de A con B, es otro conjunto formado por los elementos de la unión de $A - B$, con los elementos de $B - A$. Se representa por $A \Delta B$

Matemáticamente:

$A \Delta B = \{x / x \in A \wedge x \notin B \vee x \in B \wedge x \notin A\}$

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

Ejemplo
Sean los conjuntos

$A = \{x / x \in N, 2 < x \leq 6\} = \{3,4,5,6\}$

$B = \{x / x \in N, 2 \leq x \leq 7\} = \{2,3,4,5,6,7\}$

$C = \{x / x \in N, 2 \le x < 5\} = \{2,3,4\}$

Hallar:

$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{\quad\} \cup \{2,7\} = \{2,7\}$

$A\Delta C = (A - C) \cup (C - A) = \{5,6\} \cup \{2\} = \{5,6\}$

$B\Delta C = (B - C) \cup (C - B) = \{5,6,7\} \cup \{\quad\} = \{5,6,7\}$

5. Complemento

Sea A, un conjunto no vacío, el complemento de A denotado por $A^c (\overline{A} \quad o \quad A^{'})$, es otro conjunto formado por los elementos del conjunto universal que no pertenecen al conjunto A; es decir:

$A^c = \{x / x \in \cup \wedge x \notin A\} = U - C$

Ejemplo

Sea el conjunto

$A = \{x / x \in N, 2 < x \le 6\} = \{3,4,5,6\}$

Hallar su complemento

$A^c = \cup - A = \{1,2,3,4,5,6,7...\infty\} - \{3,4,5,6\} = \{1,2,7,8,...\infty\}$

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{3,4,5\}$

Calcular:

$(A \cup B)^c$

$(A \cup B)^c = ? - (A \cup B) = \{1,2,3,4,5,6,7...\} - \{1,2,3,4,5\} = \{6,7,8,9,...\}$

Calcular

$A^c \cap B^c$

$A^c = U - A = \{1,2,3,4,5,6,7,...\} - \{1,2,3\} = \{4,5,6,7,..\}$

$B^c = U - B = \{1,2,3,4,5,6,...\} - \{3,4,5\} = \{1,2,6,7,.\}$

$A^c \cap B^c = \{6,7,8,9,.\}$

De los 2 ejemplos anteriores se tiene:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Teoremas

Leyes de Morgan

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
3. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

6. Conjunto potencia

Sea A un conjunto no vacío, el conjunto potencia de A denotado por $P(A)$, es otro conjunto formado por todos los subconjunto que se pueden obtener con las combinaciones de los elementos de A A y el conjunto vacío.

Teorema

Sea el conjunto A, el número de elemento del conjunto potencia A, es dado por:

$n(P(A)) = 2^{n(A)}$

Ejemplo

Sea el conjunto

$A = \{1, 2, 3\}$

Hallar su conjunto potencia

$P(A) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1, 2, 3\},\phi\}$

Como $n(A) = 3 \rightarrow n[P(A)] = 2^3 = 8$

Ejercicios

Sean los conjuntos:

$A = \{x / x \in N, \quad 2 < x < 5\}$

$B = \{x / x \in N, \quad 2 \leq x < 6\}$

$C = \{x / x \in N, \quad 1 \leq x < 3\}$

Calcular

1. $A \cup B; \quad A \cap C; \quad C'; \quad B - A; \quad A \Delta C$
2. $(A \cap B) - (B \cap C)$

Solución

$$A = \{x / x \in N, \quad 2 < x < 5\} = \{3, \quad 4\}$$
$$B = \{x / x \in N, \quad 2 \le x < 6\} = \{2, \quad 3, \quad 4, \quad 5\}$$
$$C = \{x / x \in N, \quad 1 \le x < 3\} = \{1, \quad 2\}$$

Para la pregunta 1

$$A \cup B = \{2,3,4,5\}$$
$$A \cap C = \{\ \} = \phi$$
$$C' = \{3,4,5,...\infty\}$$
$$B - A = \{2, \quad 5\}$$
$$A \Delta C = \{3, \quad 4\} \cup \{1, \quad 2\} = \{1, \quad 2, \quad 3, \quad 4\}$$

Para la pregunta 2

$$(A \cap B) - (B \cap C) = \{3, \quad 4\} - \{2\} = \{3, \ 4\}$$

Ejercicios propuestos

1. Sean los conjuntos de números naturales

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$
$$B = \{1,3,5,7\}$$
$$C = \{2,4,6,8\}$$

Hallar:

$$a. \quad (A \cap B)^c \cup C^c$$
$$b. \quad (A \cap B)^c \cap C^c$$

2. Sean los conjuntos:

$$A = \left\{ \sqrt{2x+1} \in N / 0 \le x \le 8 \right\}$$
$$B = \left\{ x^2 / x \in Z, -2 \le x < 3 \right\}$$

Expresar por extensión y calcular su cardinal

3. El conjunto A tiene el doble de elementos de B, si ambos tienen la cuarta parte de elementos comunes de lo que tiene B, además entre A y B tienen 22 elementos. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto A.

4. Sea el conjunto

$$A = \{x / x \in N\ ,\ (x-1)(x-3)(x+5) = 0\}$$

Expresar por extensión

5. Sea el conjunto:

$$A = \{1,2,\{2,3\},3,\{3,4\},4,5\}$$

Indicar que enunciado es verdadero o falso

$a.\quad \{1,4\} \in A$

$b.\quad \{2,3\} \in A$

$c.\quad \{\{2,3\},4\} \subset A$

6. Sean los conjuntos de números naturales

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{2,3,4\}$

$C = \{3,4,5\}$

Hallar:

$a.\quad (A \cap B)^c \cup C^c$

$a.\quad (A \cup B)^c \cup C^c$

$a.\quad (A \cup B)^c \cap C^c$

$a.\quad (A - B)^c \cup C^c$

$a.\quad (A \Delta B)^c \cup C^c$

7. El conjunto A tiene el triple de elementos de B, si ambos tienen la tercera parte de elementos comunes de lo que tiene A, además entre A y B tienen 80 elementos. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto B.

8. En una reunión compuesta por 55 personas, 20 hablan inglés, 30 francés y 10 ninguno de los dos idiomas. ¿Cuántos hablan solo inglés?, ¿cuantos solo francés? y ¿cuantos los dos idiomas?.

9. En una reunión compuesta por 70 personas, 30 hablan inglés, 50 francés. ¿Cuántos hablan solo inglés?, ¿cuantos solo francés? y ¿cuantos los dos idiomas?.

10. En un salón de clases compuesta por 58 estudiantes, 25 son buenos en matemática, 24 en física y 30 en química; 9 son buenos en matemática y física, 8 en física y química y 7 en matemática y química. ¿Cuántos son buenos solo en matemática?, ¿cuantos solo en física? y ¿cuantos solo en química y cuantos los tres materias.

11. En un salón de clase, conformado por 52 estudiantes, 40 hablan español, 20 hablan inglés. Calcular: a. Cuantos estudiantes hablan los dos idiomas; b. cuantos solo inglés y c. cuantos solo español.

12. En un salón de clases hay 34 estudiantes, de los cuales 20 hablan francés, 14 hablan inglés y 4 no hablan ninguno de los idiomas. ¿cuantos hablan los dos idiomas?, ¿Cuántos hablan solo inglés y solo francés?, y ¿Cuántos hablan un solo idioma?

13. En un salón de clase compuesto por 70 alumnos, 20 no hablan inglés, 30 no hablan francés y 5 no hablan ninguno de los idiomas. ¿Cuántos hablan solo inglés?, ¿Cuántos hablan un solo idioma? y ¿cuantos hablan los dos idiomas?

14. Demostrar que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

15. Sean los subconjuntos de números naturales

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

$$B = \{1,3,5,7\}$$

$$C = \{2,3,4,6,8\}$$

Hallar:

$$(A \cap B)^c \cup C^c$$

16. Sea el conjunto:

$$A = \left\{ \sqrt{x+1} \in N \,/\, 0 \leq x < 5 \right\}$$

Expresar por extensión

17. Sean los conjuntos de los números naturales

$A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{1,3,5,7\}$

$C = \{2,3,4,6,8\}$

Hallar:

a. $(A-B)\Delta(B-C)$

b. $(A \cap B)\Delta(B \cap C)$

c. $(A \cap B)-(B \cap C)$

d. $(A\Delta B) \cap (B\Delta C)$

e. $(A-B)^c \,\Delta (B-C)^c$

a. $(A-B) \cup (B-C)$

CAPÍTULO II
Producto cartesiano

Definición

Sean dos conjunto A y B, el producto cartesiano de AxB es otro conjunto cuyos elementos son pares ordenados de la forma (a , b). El primer elemento del par ordenados se le llama primera componente y al segundo elemento del par se le llama segunda componente.

$$AxB = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo

$$A = \{1,2,3\} \quad y \quad B = \{4,5\}$$

$$Hallar: AxB \quad y \quad BxAA - B$$

$$AxB = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

$$BxA = \{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$$

Nota:

$$AxB \neq BxA$$

$$n(AxB) = n(A).n(B)$$

$$n(AxB) = n(BxA)$$

Ejemplo

Del ejemplo anterior calcular

$$n((A \cup B)xB)$$

$$n((A \cup B)xB) = n(A \cup B)xn(B) = (5)(2) = 10$$

$$n((A \cup B)xA) = n(A \cup B)xn(A) = (5)(3) = 15$$

Nota:

Si dos pares ordenados son iguales, entonces lo son sus respectivas componentes:

$$(a, b) = (x, y) \rightarrow a = x \wedge b = y$$

Ejemplo

Calcular “x” e “y”, en:

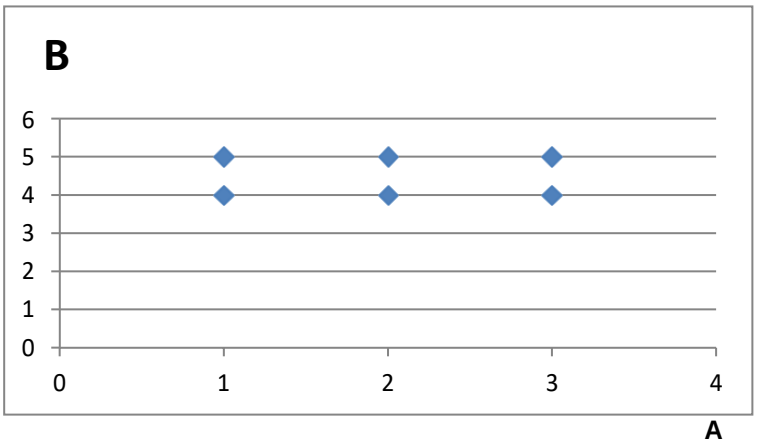
$$(5, \quad x - y) = (x + y, \quad 1) \rightarrow a = x \wedge b = y$$

Solución

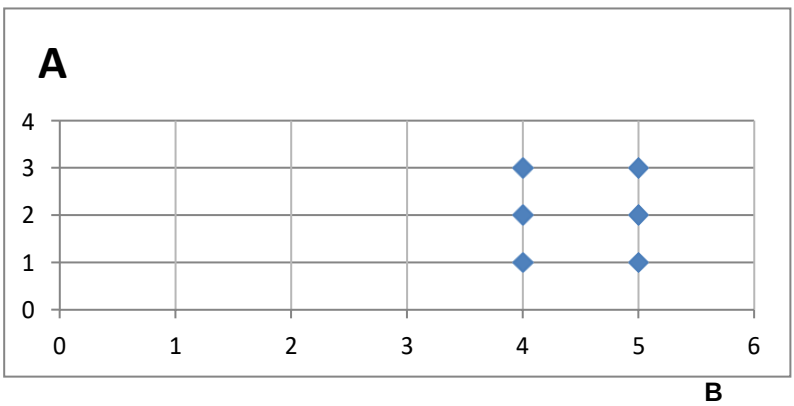
$$(5,\quad x-y)=(x+y,\quad 1)\rightarrow 5=x+y\wedge x-y=1$$

$$resolviendo\rightarrow x=3\quad e\quad y=2$$

Representación gráfica AxB



Representación gráfica BxA



Ejercicios propuestos

1. $calcular \quad x \quad e \quad y \quad (x+y, \quad 1) = (5, \quad x-y)$

2. $Sean \quad los \quad conjuntos \quad A = \{1,2,3\} \quad B = \{3,4,5\}, \quad C = \{4,5,6\}$

$calcular$:

$a.(A-B)x(B-C)$

$b.(A-B)xC$

$c.(A \cap B)xC$

$d.(A \cap B)x(B \cap C)$

Relación

Sean A y B dos conjunto, una relación R es un subconjunto del producto cartesiano AxB, donde las parejas (a , b) cumplen una condición especifica de la relación.

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$A = \{1,2,3\} \quad y \quad B = \{4,5\}$

$AxB = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$

$Sean \quad las \quad relaciones$:

1. $R_1 = \{(a,b) \in AxB / a+b = par\}$

   $R_1 = \{(1,5),(2,4),(3,5)\}$

2. $R_2 = \{(a,b) \in AxB / b = a+3\}$

   $R_2 = \{(1,4), (2,5)\}$

Función

Una función es una relación donde a cada elemento de A le corresponde uno y solo un elemento de B.

Otra definición

Es un conjunto de pares ordenados en la cual no existen dos pares con la misma primera componente.

Nota: toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

Ejemplo

$R_1 = \{(1,3),(2,5),(3,5),(4,3)\}$

$R_2 = \{(1,3),(2,5),(1,7),(4,9)\}$

De la definición de función R_1 es función, ya que no existe ningún par ordenado con la misma primera componente; mientras que R_2, no es función, ya que existen dos pares ordenados con la misma primera componente.

Operaciones con funciones

Para realizar la suma, resta, multiplicación y división de funciones, se ejecutan en la segunda componente la operación indicada de los pares ordenados que tengan la misma primera componente

Ejercicios:

$f = \{(x, y) \in AxB / y = 2x + 1\}$

$f = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$

$g = \{(x, y) \in AxB / y = 2x + 3\}$

$g = \{(1,5), (2,7), (3,9), (4,11)\}$

Calcular las siguientes operaciones:.

$f + g = \{(1, 8), (2, 12), (3, 16), (4, 20)\}$

$f - g = \{(0, -2), (0, -2), (0, -2), (0, -2)\} = \{(0, -2)\}$

$f * g = \{(1, 15), (2, 35), (3, 63), (4, 99)\}$

$f / g = \{(1, 3/5), (2, 5/7), (3, 7/9), (4, 9/11)\}$

Ejercicios propuestos

1. *Calcular* x *e* y *en*: $(-1, 5x + y) = (x - 3y, 11)$
2. $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{3,4,5,6\}$ *calcular* $(A - B)x(B - A)$
3. $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{3,4,5,6\}$ *calcular* $R = \{(x, y) / x > y\}$
4. $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{3,4,5,6\}$ *calcular* $R = \{(x, y) / y = 2x + 1\}$
5. $f = \{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$ $g = \{(1,5),(2,8),(3,11),(4,14)\}$ *calcular*: $f + g$; $f - g$; $f * g$; f / g

Tipos de funciones

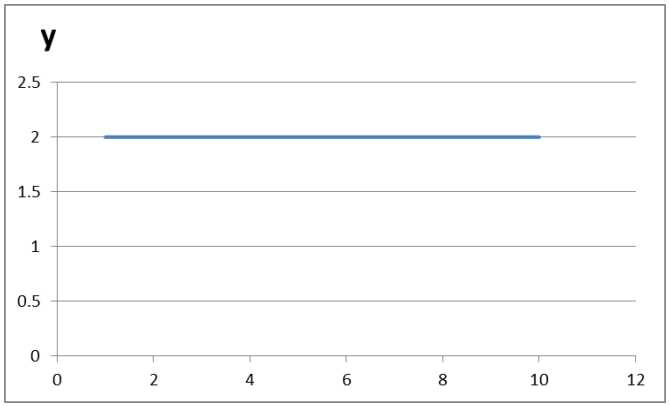
1. Función constante

$f(x) = k$

$f = \{(1,k), (2, k), (3, k),..., (n, k)\}$

$para \quad k = 2$

Gráfica

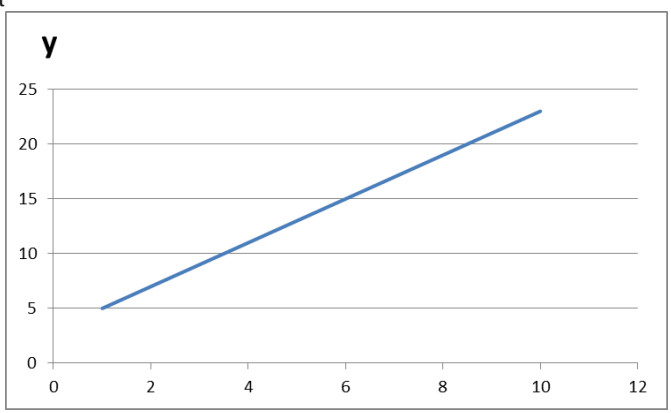


2. Función lineal

$f(x) = 2x + 3 \quad x \in R$

$f = \{(1,5), (2,7), (3,9),...(n,2n+3)\}$

Gráfica

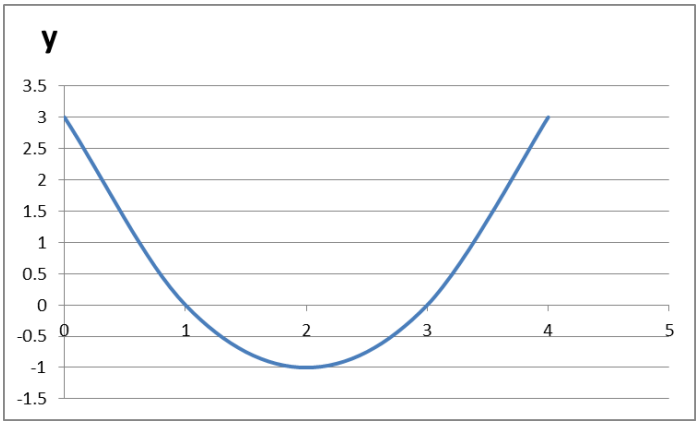


3. Función cuadrática

$$f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 \quad x \in R$$

$$f = \{(0,3), (1,0), (2,-1), (3,0), (4,3)\}$$

Gráfica

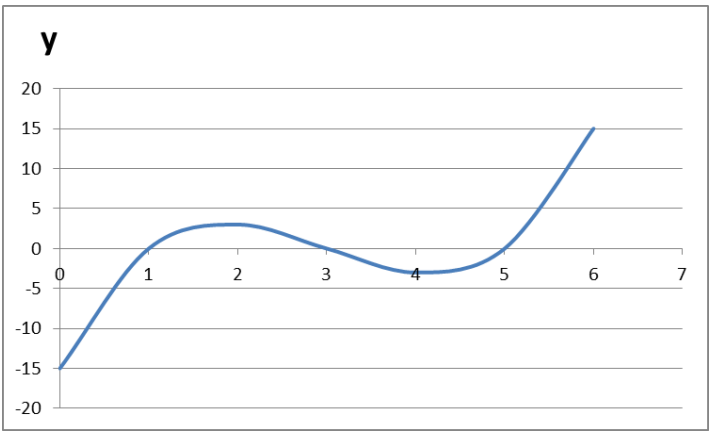


4. Función cubica

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-5) \quad x \in R$$

$$f = \{(0,-15), (1,0), (2,3), (3,0), (4,-3), (5,0), (6,15)\}$$

Gráfica

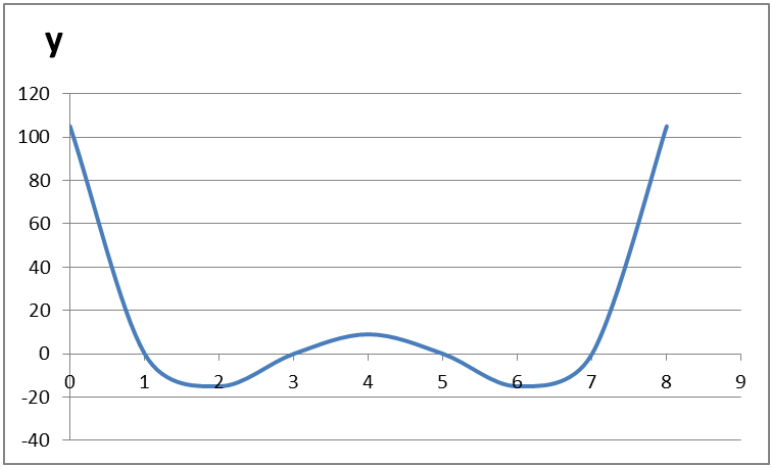


5. Función cuarto grado

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) \quad x \in R$$

$$f = \{(0,105), (1,0), (2,-15), (3,0), (4,9), (5,0), (6,-15), (7,0), (8,105)\}$$

Gráfica



CAPÍTULO III
Lógica proposicional

Concepto de lógica
Es el estudio del razonamiento humano.
Es lógico (verdad) que si sumo 3 unidades más 2 unidades es igual a 5 unidades.
Es lógico (falso), que 20 es un número impar.

Concepto proposición
Es un enunciado semántico, cuyo valor de verdad puede ser verdadero (V) o falso (F) y son llamados proposiciones simples

Ejemplos
- Carlos estudia matemática
- Lima es la capital del Perú
- 2+4=7
- 5 es un número par
- El teorema de Pitágoras solo se cumple para triángulos rectángulos.

No son proposiciones lógicas, aquellos enunciados que se desconoce su valor de verdad.

Ejemplos
- ¿Cómo te llamas?
- ¿Escúchame?

A las proposiciones simples se les representa con las letras minúsculas, tales como: $p, q, r, t,..$

Concepto lógica proposicional
Estudia la formación de proposiciones complejas a partir de proposiciones simple unidas o enlazadas por conectivos lógicos.

Ejemplo
p : Carlos estudia ingles
q : Carlos trabaja
Una proposición compuesta puede ser:

p			q
carlos	*estudia*	*ingles*	*y*	*trabaja*

En este ejemplo el conectivo lógico es la letra “y”, el cual une a las dos proposiciones simples.

Conectivos lógicos

Conectivo lógico	Notación	Nombres
…y…	$\wedge$	conjunción
…o…	$\vee$	Disyunción débil
O…o…	Δ	Disyunción fuerte
Si …entonces…	$\rightarrow$	Condicional
…si y solo si…	$\leftrightarrow$	Bicondicional
No	$\approx$	Negación

Ejemplo:

p : Carlos estudia ingles

q : Carlos estudia francés

$p \vee q$: Carlos estudia inglés o francés

$p \wedge q$: Carlos estudia inglés y francés

Tabla de verdad

Permite evaluar el valor de verdad de una proposición lógica
Para una sola proposición lógica, el valor de verdad solo se tiene 2 posibilidades, verdad (V) o falsedad (F).

p
V
F

Para dos proposiciones lógicas, el valor de verdad presenta 4 posibilidades para cada proposición simple.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Para tres proposiciones lógicas el valor de verdad, presenta 8 posibilidades para cada proposición simple.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

En general, para $"n"$ proposiciones lógica simples el valor de verdad tendrá $"2^n"$ posibilidades entre verdades (V) y falsedades (F).

Tabla de verdad, para una proposición lógica

1. La conjunción: para dos proposiciones simples unidas por el conectivo…"y…", será verdad la proposición compuesta, cuando ambas proposiciones son verdad.

Ejemplo:

p : Carlos estudia ingles

q : Carlos trabaja

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2. La disyunción débil: para dos proposiciones simples unidas por el conectivo "…o…" será falso la proposición compuesta, cuando ambas proposiciones simples son falsa.

Ejemplo:

p : Carlos habla ingles

q : Carlos habla francés

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. La disyunción fuerte: para dos proposiciones simples unido por el conectivo "O…o…..será verdad la proposición compuesta, cuando ambas proposiciones simples sean diferentes.

Ejemplo:
p : Carlos vive en el distrito de Surco
q : Carlos vive en el distrito de Barranco
O Carlos vive en el distrito de surco o en barranco

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. La condicional: para dos proposiciones simple unido por el conectivo "Si….entonces…." solo será falsa la proposición compuesta, cuando la primera proposición (antecedente) sea verdad y la segunda (consecuente) sea falsa.

Ejemplo:
p : 24 es un número par
q : 24 es divisible por 2
Si 24 es un número par, entonces 24 es divisible por 2

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5. La bicondicional: para dos proposiciones simple el conectivo "….si solo si…." será verdad la proposición compuesta, cuando ambas proposiciones simple tengan el mismo valor de verdad.

Ejemplo:

$p:$ 24 es un número par
$q:$ 24 es divisible por 2
24 es un número par, si y solo si, 24 es divisible por 2

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

6. La negación: para una proposición simple, el conectivo "no" será la negación del valor de verdad.

p	$\approx p$
V	F
F	V

Construcción de tablas de verdad
Hallar la tabla de verdad del siguiente esquema proposicional
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Clasificación de una tabla de verdad

Tautología
Ocurre cuando todos los resultados de la tabla de verdad son todas verdades

Contradicción
Ocurre cuando todos los resultados de la tabla de verdad son todos falsos

Contingencia
Ocurre cuando los resultados de la tabla de verdad tienen verdad y falsedad.

Ejercicios propuestos
Calcular la tabla de verdad para las siguientes proposiciones

1.$(p \to \approx q) \wedge (q \to \approx r)$
2. $p \to (\approx p \to p)$
3.$(p \wedge \approx q) \wedge q$
4.$(r \vee p) \wedge \approx (q \vee p)$
5. $p \to (\approx q \wedge p)$
6. $\approx q \leftrightarrow (\approx p \vee q)$
7.$(p \wedge q) \to (q \wedge r)$
8.$\left[(p \to q) \wedge p\right] \to q$
9.$\left[(\approx p \to q) \wedge \approx p\right] \to \approx q$
10.$\left[(p \Delta q) \wedge p\right] \to \approx q$

Ejemplos
Si se conoce que:
$(q \wedge \approx r) \to p \quad es \quad falsa$

Determinar el valor de verdad de:
$(\approx r \vee \approx p) \to (p \wedge \approx r)$

Solución

$(q \wedge \approx r) \rightarrow p = F$

$entonces:$

$(q \wedge \approx r) = V \quad p = F \quad Rpta.$

$q = V \quad Rpta. \quad \approx r = V \rightarrow r = F \quad Rpta.$

$reemplazando \quad valores:$

$(\approx r \vee \approx p) \rightarrow (p \wedge \approx r)$

$(V \vee V) \rightarrow (F \wedge V) = V \rightarrow F = F \quad Rpta.$

Ejercicio propuesto

$(\approx p \rightarrow \approx q) \vee (r \Delta q) \quad es \quad falsa$

Determinar el valor de verdad de:

$\approx q \rightarrow \left[(p \leftrightarrow q) \wedge r) \right]$

CAPÍTULO IV
Números reales

Es el conjunto de números que está formado por los números naturales, enteros, racionales e irracionales. Se representa con la letra "**R**"

Conjunto de los números naturales

Son números que nos permite contar, comparar y realizar operaciones. Se representa con la letra "**N**"

$$\mathrm{N} = \{1,2,3,4,.....\infty\}$$

Conjunto de números enteros

Son números que nos permite contar, comparar y realizar operaciones. Se representa con la letra "**Z**"

$$Z = \{-\infty,...-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0\ ,1,\ 2,\ 3,\ 4,.....\infty\}$$

Conjunto de números racionales

Son números que se pueden expresar como una fracción entre dos enteros y nos permite: contar, medir, comparar y realizar operaciones. Se representa con la letra "**Q**"

$$Q = \left\{-\infty,...-4,\ -3,\ -\frac{5}{2},\ -2,\ -1,-\frac{1}{2}\ \ 0\frac{1}{2},1,2,\ \ \frac{5}{2}3,\ \ 4,.....\infty\right\}$$

Conjunto de números irracionales

Son números que no se pueden expresar como una fracción entre dos enteros y nos permite: medir, comparar y realizar operaciones. Se representa con la letra "**I**"

$$I = \{-\infty,...-\pi,\ -e,\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \pi,\ e.....\infty\}$$

$$\pi = 3.141592654...$$

$$e = 2.718281828...$$

$$\sqrt{2} = 1.414213562...$$

Ley de los signos para la suma y resta

$(+)+(+)=+$

$(-)+(-)=-$

$(+)+(-) = se\ \ resta\ \ y\ \ se\ \ coloca\ \ el\ \ signo\ \ de\ \ la\ \ mayor\ \ cantidad$

$(+)+(+) = se\ \ resta\ \ y\ \ se\ \ coloca\ \ el\ \ signo\ \ de\ \ la\ \ mayor\ \ cantidad$

Ley de los signos para multiplicación

$(+)(+) = +$
$(-)(-) = +$
$(+)(-) = -$
$(-)(+) = -$

Ley de los signos para división

$(+) \div (+) = +$
$(-) \div (-) = +$
$(+) \div (-) = -$
$(-) \div (+) = -$

Exponentes

Definición
Sea “a” una cantidad cualquiera elevado a un exponente “n”, es igual al producto de tanta veces “a” como indique el valor de “n”. “a” es un número real y “n” un numero natural.

$$a^n = \underbrace{(a)(a)(a)...(a)}_{n-veces}$$

Teorema

$$a^n . a^m . a^p = a^{n+m+p}$$

Teorema

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \rightarrow m = n \rightarrow \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^{n-n} \rightarrow a^0 = 1$$

Axioma

$$cuando \quad m = n \rightarrow \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^{n-n} \rightarrow a^0 = 1$$

Axioma

$$cuando \quad n = 0 \rightarrow \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} \rightarrow a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Teorema

$$\left\{\left[a^{n}\right]^{m}\right\}^{p} = a^{nmp}$$

Teorema

$$(a^{n}.b^{m}.c^{p})^{q} = a^{nq}.b^{mq}.c^{pq}$$

Definición

$$\sqrt[q]{a^{p}} = a^{\frac{p}{q}}$$

Axioma

$$cuando \quad p = nq \rightarrow \sqrt[q]{a^{nq}} = a^{\frac{nq}{q}} = a^{n}$$

Teorema

$$(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^{n}$$

Teorema

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$$

Teorema

$$\sqrt[p]{a\sqrt{b}} = \sqrt[pq]{a^{q}b} = (a^{q}b)^{\frac{1}{pq}} = a^{\frac{1}{p}}.b^{\frac{1}{pq}}$$

Jerarquía en las operaciones combinadas

1. Signos de colección: son tal como los paréntesis, llave, corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicación y división
4. Suma y resta

Ejemplos resueltos

1. $36 \div 4x9$

solucion

$36 \div 4x9 = 9x9 = 81$

de otra forma

$36 \div 4x9 = 36x9 \div 4 = 324 \div 4 = 81$

2. $5x2 \div 3x6$

solucion

$$5x2 \div 3x6 = 5x\frac{2}{3}x6 = \frac{5x2x6}{3} = 20$$

$5x2 \div 3x6 = 5x2x6 \div 3 = 60 \div 3 = 20$

3. $6 \div 2 \div 3x5$

solucion

$$6 \div 2 \div 3x5 = \frac{6}{2} \div 3x5 = \frac{6}{2} x \frac{1}{3} x5 = \frac{30}{6} = 5$$

$6 \div 2 \div 3x5 = 6x5 \div 2 \div 3 = 30 \div 2 \div 3 = 15 \div 3 = 5$

Ejercicios propuestos

1. $8 \div 2x4$
2. $8x5 \div 4x7 \div 6x12$
3. $10x7 \div 2x5 \div 3x9$
4. $10 - 7x6 \div 2x5 \div 3x9$
5. $3x(10 - 7) \div 2x5 \div 3x9$
6. $12x7 \div 3x5 \div 3x2$
7. $12 + \left[(3 + 6) \div 3 - 20 \div 10x2\right] + 3^2 - 2^3$
8. $12 \div 4x3 - 3\left[(13 + 5) \div 3 - 20 \div 10x2\right] + 5^2 - 4^3$

9 $8 \div 2(1 + 3)$

10 $16 \div 2(1+3)(3-1)$

11. $10x7 \div 2x5 \div 3x9$

12. $15x2 \div 7x21 \div 5x3$

13. $20 + \left[(3+15) \div 3 - 20 \div 10x2\right] + 4^2 - 3^3$

14. $100 \div 2 \div 5 \div 2$

15. $20x7 \div 14x15 \div 3x9$

Números decimales exactos

Todo número decimal exacto se puede expresar como una fracción, en el numerador se escribe la parte entera y la parte decimal, y en el denominador la unidad seguida de tanto ceros como cifras tenga la parte decimal.

Ejemplos

1. $12.5 = \frac{125}{10}$
2. $12.15 = \frac{1215}{100}$
3. $12.05 = \frac{1205}{100}$
4. $0.5 = \frac{5}{10}$
5. $0.15 = \frac{15}{100}$
6. $0.0005 = \frac{5}{10000}$
7. $0.0015 = \frac{15}{10000}$
8. $0.00105 = \frac{105}{100000}$

Ejercicios

a. 2.345

b. 0.56

c. 23.467

Multiplicación de un número entero por potencia de 10^n

Cualquier número entero multiplicado por potencia de 10^n, es el número con tanto cero a la derecha como indica el exponente de 10.

Ejemplos

$3x10^2 = 300$

$3x10^4 = 30000$

$23x10^3 = 23000$

$300x10^2 = 30000$

Multiplicación de un número decimal por potencia de 10^n

Cualquier número decimal multiplicado por potencia de 10^n, es el número con el nuevo punto decimal corrido a la derecha como indica el exponente de 10. En caso de no existir cifra significativa completar con ceros.

Ejemplos

$0.12x10^3 = 120$

$3.234x10^2 = 323.4$

$3.234x10^4 = 32340$

$23.275x10^2 = 2327.5$

$12.343x10^4 = 123430$

División de un número entero por potencia de 10^n

Cualquier número entero dividido por potencia de 10^n, es un número decimal, con el punto decimal contado de derecha a izquierda del número como indica el exponente de 10.

Ejemplos

$3 \div 10^2 = 0.03$

$23 \div 10^3 = 0.023$

$1245 \div 10^3 = 1.245$

$1245 \div 10^4 = 0.1245$

División de un número decimal por potencia de 10^n

Cualquier número decimal dividido por potencia de 10^n, es un número decimal, con el nuevo punto decimal contado de derecha a izquierda del punto decimal del número como indica el exponente de 10.

Ejemplos

$0.3 \div 10^2 = 0.003$

$0.23 \div 10^3 = 0.00023$

$12.45 \div 10^3 = 0.01245$

Conversión por factor unidad

Es una forma práctica de utilizar una regla de tres simple para convertir una magnitud a otra magnitud.

Factor unidad

$$1m = 100cm \rightarrow \frac{1m}{1m} = \frac{100cm}{1m} \rightarrow 1 = \frac{100cm}{1m}$$

$$1m = 100cm \rightarrow \frac{1m}{100cm} = \frac{100cm}{100cm} \rightarrow \frac{1m}{100cm} = 1$$

.

Ejemplos

Convertir 4 metros a centímetros

$$4\not{m}.(\frac{100cm}{1\not{m}}) = 400cm$$

Convertir 24.5 años a meses

$$24.5años.(\frac{12meses}{1año}) = 294meses$$

Ejercicios

Efectuar las siguientes operaciones

a. $0.456x10^5$

b. $23.456x10^5$

c. $1230.456x10^4$

d. $1234.34 \div 10^5$

e. $0.456 \div 10^5$

f. $12.345 \div 10^4$

g. $56x10^5$

Efectuar las siguientes conversiones
a. Convertir 24.7 años a días
b. Convertir 60.4 años a horas
c. Convertir 20.5 kg a libras
d. Convertir 40.5 metros a centímetros

Números periódicos puros y mixtos
Para un número dado, el periodo son cifra(s) iguales que se repiten indefinidamente después de la parte entera del número (periódico puro), o cualquier cifra (s) no periódica antes del periodo (periódico mixto); el objetivo es convertirlo a una fracción.

Ejemplos

1. $0.666...6 = 0.\overline{6} \rightarrow peridico \quad puro$
2. $2.454545...45 = 2.\overline{45} \rightarrow periodico \quad puro$
3. $2.13454545...45 = 2.13\overline{45} \rightarrow periodico \quad mixto$

En el primer ejemplo la cifra periódica es 6
En el segundo ejemplo la cifra entera es 2 y la parte periódica es 45
En el tercer ejemplo la cifra entera es 2, la parte no periódica es 13 y la parte periódica es 45.

Procedimiento para convertir un número periódico en fracción
1. Igualar el número periódico a una variable.
2. Multiplicar la ecuación formada, por una potencia de 10 dependiendo del número de cifras del periodo, el objetivo descomponer al número en la parte entera y el periodo, con el objetivo de eliminar el periodo.
3. Realizar la resta de la segunda a la primera ecuacion y calcular el valor de la variable en fracción.

Caso-1

1. $0.3333...3 = 0.\overline{3}$

$M = 0.333...3 \qquad (1)$

$10M = 3.333...3 \qquad (2)$

$(2) - (1)$

$10M - M = 3.333...3 - 0.333...3$

$9M = 3$

$M = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ *Rpta.*

Regla practica:
Para un numero en la cual el entero es cero, y la parte decimal es un periódico puro, equivale a una fracción en el numerador se escribe la cifra(s) periódica y en el denominador tantos nueve como cifras tenga el periodo.

Otros ejemplos

1. $0.777...7 = 0.\overline{7} = \frac{7}{9}$
2. $0.53535353...3 = 0.\overline{53} = \frac{53}{99}$
3. $0.234234234...234 = .0.\overline{234} = \frac{234}{999}$
4. $0.1234512345...12345 = 0.\overline{12345} = \frac{12345}{99999}$

Caso-2

2. $2.545454...54 = 2.5\overline{4}$

$M = 2.545454...54 \quad (1)$

$100M = 254.5454...54 \quad (2)$

$(2) - (1)$

$100M - M = 254 - 2$

$99M = 254 - 2$

$M = \frac{254-2}{99} = \frac{252}{99} = \frac{84}{33}$

Regla practica:

Para un decimal periódico puro, equivale a una fracción en el numerador se escribe la parte entera y la cantidad periódica y se le resta la cantidad entera, y en el denominador tantos nueve como cifras tenga el periodo.

Otros ejemplos

1. $7.53535353...3 = 7..\overline{53} = \frac{753-7}{99} = \frac{746}{99}$
2. $30.234234234...234 = 30.2\overline{34} = \frac{30234-30}{999} = \frac{30204}{999}$
3. $123.121212..12 = 123..\overline{12} = \frac{12312-123}{99} = \frac{12189}{99}$

Caso 3

3. $3.1373737..37 = 3.13\overline{37}$

$M = 3.1373737..37 = 3 + 0.1373737...37$

$10M = 30 + 1.373737...37 = 30 + 1 + 0.373737...37$

$10M = 31 + 0.373737...37 \qquad (1)$

$1000M = 3100 + 37.373737...37 \qquad (2)$

$(2) - (1)$

$990M = 3100 + 37.373737...37 - 31 - 0.373737...37$

$990M = 3100 + 37 - 31 = 3137 - 31$

$$M = \frac{3137 - 31}{990} = \frac{3106}{990}$$

Regla practica:

Para un decimal periódico mixto, equivale a una fracción en el numerador se escribe la parte entera, el decimal no periódico y la parte periódica y se le resta la cantidad entera seguida del decimal no periódico, y en el denominador tantos nueve como cifras tenga el periodo seguido de tantos ceros como cifras tenga el decimal no periódico.

Otros ejemplos

1. $7.653535353...3 = 7.653\overline{3} = \dfrac{7653 - 76}{990} = \dfrac{7577}{990}$

2. $30.5234234234...234 = 30.5234\overline{234} = \dfrac{305234 - 305}{9990} = \dfrac{304929}{9990}$

3. $30.15234234234...234 = 30.15234\overline{234} = \dfrac{3015234 - 3015}{99900} = \dfrac{3012219}{99900}$

Ejercicios propuestos

Expresar en fracción los siguientes números

1. $4.\overline{6}$
2. $4.\overline{17}$
3. $4.1\overline{36}$
4. $4.14.\overline{67}$
5. $0.132\overline{6}$

Realizar las operaciones

1. $0.\bar{1} + 0.\bar{2} - 0.\bar{3}$
2. $(0.\overline{23} + 0.\overline{24} + 0.\overline{25})x99$
3. $1.\bar{3} + 2.\bar{3} + 3.\bar{3}$
4. $\sqrt{0.\overline{54} + 0.\overline{45}}$
5. $\dfrac{0.\overline{32}}{0.\overline{64}}$
6. $1.\bar{3} + 3.\bar{7} + 0.\bar{8}$
7. $1.1\bar{3} + 3.2\bar{7} + 0.5\bar{8}$
8. $1.26 + 1.54 + 1.18$

CAPÍTULO V
Ecuaciones

Definición
Una ecuación es una igualdad algebraica, condicionado al valor o valores de las variables (llamadas incógnitas, solución o raíces).

Ejemplo-1

$$2x + 5 = 13$$

La igualdad se cumple solo para $x = 4$

Ejemplo-2

$$x^2 + x - 6 = 0$$

La igualdad se cumple para $x = 2 \quad y \quad x = -3$

Resolver una ecuación, es calcular el valor o valores de las incógnitas. Para resolver una ecuación, se necesita tener presentes los siguientes teoremas

TEOREMAS

1. $Sea \quad a = b \quad \Rightarrow a \pm c = b \pm c$
2. $Sea \quad a = b \quad \Rightarrow a.c = b.c$
3. $Sea \quad a = b \quad \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad c \neq 0$
4. $Sea \quad a.b = 0 \quad \Rightarrow a = 0 \quad y/o \quad b = 0$
5. $Sea \quad a = b \quad \wedge \quad c = d \quad \Rightarrow a \pm c = b \pm d$
6. $Sea \quad a^p = a^q \quad \Rightarrow p = q$
7. $sea \quad a^a = b^b \quad \Rightarrow a = b$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA
Son expresiones algebraicas que se reducen a la siguiente forma:

$$ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} \quad a \neq 0$$

Ejemplos

Resolver la ecuación

$$2x + 3 = 11$$

Restando a ambos lados por -3

$$2x + 3 - 3 = 11 - 3$$

$$2x = 8$$

Dividiendo a ambos lados por 2

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \rightarrow x = 4 \quad Rpta.$$

Resolver

La mitad de mi sueldo lo gasto en alimentos, la cuarta parte en mis estudios y la octava parte en pasajes y me sobra 600 nuevos soles. ¿Cuánto es mi sueldo?.

Solución

$$sea \quad x = mi \quad sueldo$$

$$\frac{x}{2} = gasto \quad en \quad a\,\text{lim}\,entos$$

$$\frac{x}{4} = en \quad estudios$$

$$\frac{x}{8} = en \quad pasajes$$

$$x - (\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8}) = 600$$

$$8x - 4x - 2x - x = 4800$$

$$x = 4800 \quad Rpta$$

Resolver

$$4(2x - 3) - (x - 4)^2 = 5(3x - 1) - (x - 1)^2$$

Solución

$$8x - 12 - (x^2 - 8x + 16) = 15x - 5 - (x^2 - 2x + 1)$$

$$8x - 12 - x^2 + 8x - 16 = 15x - 5 - x^2 + 2x - 1$$

$$16x - 28 - x^2 = 17x - 6 - x^2$$

$$-x = -6 + 28 \rightarrow -x = 22 \rightarrow x = -22$$

Resolver

$$\frac{3x-5}{3x} = \frac{x-2}{x+1}$$

Solución

$$(x+1)(3x-5) = 3x(x-2)$$

$$3x^2 - 5x + 3x - 5 = 3x^2 - 6x$$

$$4x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4} = 1.25$$

Resolver

La edad de Carlos el tres veces la edad de Pedro, si la suma de las edades es 40 años. ¿Qué edad tiene cada uno?.

Solución

Sea: x la edad de Carlos, entonces como la suma de las edades es 40 años, luego Pedro tiene: 40-x.

Como la edad de Carlos es tres veces la edad de Pedro, luego se forma la siguiente ecuación:

$$x = 3(40 - x)$$

$$x = 120 - 3x$$

$$x + 3x = 120$$

$$4x = 120$$

$$x = \frac{120}{4} = 30 \quad edad \quad de \quad Carlos \quad Rpta.$$

$$edad \quad de \quad Pedro = 40 - x = 40 - 30 = 10 \quad Rpta.$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCONGNITAS

Son ecuaciones que tienen la siguiente forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Dónde: a, b, d, e son coeficientes de las variables $x \quad e \quad y$, además c , f son los términos independientes.

Métodos para resolver un sistema de ecuaciones:

Reducción
Consiste en eliminar la misma variable en las dos ecuaciones

Sustitución
Consiste en despejar cualquiera de las variable de la primera ecuación, y su valor sustituirla en la segunda ecuación.

Igualación
Consiste en despejar la misma variable en las dos ecuaciones, para luego igualarla.

Por determinantes
Consiste en sumas y productos de elementos (coeficientes y constantes), previamente definidos en una matriz cuadrada.

Por intersección de rectas
Consiste en graficar en el plano cartesiano a las dos ecuaciones, el punto de intersección de ambas es la solución del sistema.

Ejemplo:
Resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x + 5\,y = 13 & (1) \\ 3x - 2\,y = 4 & (2) \end{cases}$$

Por reducción
En la primera y segunda ecuación multiplicamos por 2 y 5 respectivamente

$$\begin{cases} 4x+5y=13 & (x2) \\ 3x-2y=4 & (x5) \end{cases}$$

$$8x+10y=26$$

$$15x-10y=20$$

sumando ambas igualdades

$$23x=46 \rightarrow x=\frac{46}{23}=2 \quad Rpta.$$

para calcular y en la primera ecuacion

$$4(2)+5y=13 \rightarrow 5y=13-8 \rightarrow 5y=5 \rightarrow y=1 \quad Rpta.$$

Por sustitución

En la primera ecuación despejamos " y"

$$y=\frac{13-4x}{5}$$

Este último valor lo reemplazamos en (2)

$$3x-2(\frac{13-4x}{5})=4 \rightarrow 15x-26+8x=20 \rightarrow 23x=46 \rightarrow x=2 \quad Rpta.$$

Para obtener el valor de " y" reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones.

En la primera ecuación

$$4(2)+5y=13 \rightarrow 5y=13-8 \rightarrow 5y=5 \rightarrow y=1 \quad Rpta.$$

Igualación

En la primera y segunda ecuación despejamos la incógnita “y”

$$\begin{cases} 4x+5y=13 & (1) \\ 3x-2y=4 & (2) \end{cases}$$

$$5y=13-4x \rightarrow y=\frac{13-4x}{5} \quad (3)$$

$$-2y=4-3x \rightarrow 2y=-4+3x \rightarrow y=\frac{-4+3x}{2} \quad (4)$$

igualando (3) = (4)

$$\frac{13-4x}{5}=\frac{-4+3x}{2}$$

multiplica ndo por $m.c.m = 10$

$2(13-4x) = 5(-4+3x) \rightarrow 26-8x = -20+15x$

$-8x-15x = -20-26 \rightarrow -23x = -46 \rightarrow x = \frac{-46}{-23} = 2$ *Rpta .*

para calcular " y" *en* (3)

$y = \frac{13-4(2)}{5} = \frac{5}{5} = 1$ *Rpta .*

Por determinantes

$$\begin{cases} 4x+5y = 13 & (1) \\ 3x-2y = 4 & (2) \end{cases}$$

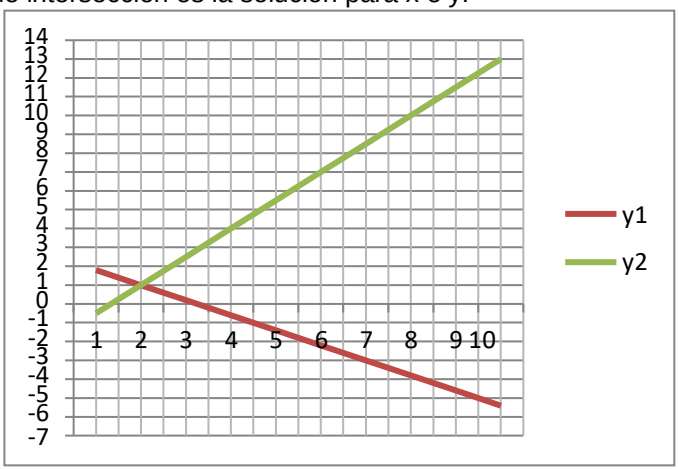
Para calcular “x” e “y”, son los arreglos de los coeficientes

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-26-20}{-8-15} = \frac{-46}{-23} = 2 \quad Rpta.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-39}{-8-15} = \frac{-23}{-23} = 1 \quad Rpta.$$

Solución grafica

En el plano cartesiano, graficamos a las dos ecuaciones lineales, el punto de intersección es la solución para x e y.



Del grafico la solución es la intersección para x=2 e y=1

Ejercicios propuestos

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

1. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ 2x + 3y = 2 \\ x + y = \frac{3}{4} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 - y^2 = -\frac{65}{36} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 6 \\ xy = 4 \\ (sugerencia \quad hacer \quad y = kx) \end{cases}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son expresiones algebraicas que se reducen a la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

Para resolver una ecuación de segundo grado se puede seguir cualquiera de los dos métodos:

1. Consiste en factorizar el trinomio e igualar a cero cada factor.

2. Utilizando la formula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nota: a las soluciones (respuestas) de una ecuación de segundo grado se le llama raíces o conjunto solución.

Resolver la ecuación de segundo grado

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

Por factorización

$$2x^2 - 7x + 3 = (2x-1)(x-3) = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$$

Por la formula general

$$a = 2 \quad b = -7 \quad c = 3$$

Reemplazando en la formula

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{7+5}{4} = 3$$

Resolver la siguiente ecuación

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Por factorización no es posible, luego recurrimos a la formula general

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 1$$

Reemplazando en la formula

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{2(2 \pm \sqrt{3})}{2}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{3} \qquad x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado

Sea la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sean x_1 y x_2, raíces de la ecuación, entonces se cumple que:

i. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

ii. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

iii. $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow x_1 = x_2$

iv. $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow x_1 \neq x_2$(las raíces son cantidades reales)

v. $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow x_1 \neq x_2$(las raíces son cantidades complejas)

vi. $x_1 = -x_2 \rightarrow b = 0 \quad (raices\ opuestas)$

vii. $x_1 = \frac{1}{x_2} \rightarrow a = c \quad (raices\ inversas)$

viii. $x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

ix. $x_1^3 + x_2^3 = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}$

Ejemplo

Sea la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Hallar el valor de la expresión

$$E = x_1^2 + x_2^2$$

Solución

De la ecuación se tienen las siguientes propiedades

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 . x_2 = 1$$

$$(x_1 + x_2)^2 = 4^2 \rightarrow x_1^2 + 2x_1 . x_2 + x_2^2 = 16 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 16 - 2x_1 . x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 16 - 2(1) = 14$$

Ejemplo

Sea la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 4x + p = 0$$

Hallar el valor de $"p"$ para los siguientes casos:

a. ¿Que la ecuación tenga las mismas raíces
b. ¿Que una raíz sea el doble de la otra
c. ¿Que la suma de los cuadrado de las raíces sea 40

Solución(a), por propiedad se sabe que:

$$b^2 - 4ac = 0 \rightarrow x_1 = x_2$$

Entonces:

$$(-4)^2 - 4(1)(p) = 016 - 4p = 0 \rightarrow p = \frac{16}{4} = 4$$

Solución (b), por propiedad se sabe que:

$$x_1 + x_2 = 4 \quad y \quad x_1 . x_2 = p$$

Por condición del problema $x_1 = 2x_2$, reemplazando en la suma de raíces, se tiene:

$$2x_2 + x_2 = 4 \rightarrow 3x_2 = 4 \rightarrow x_2 = \frac{4}{3} \quad y \quad x_1 = \frac{8}{3}$$

Como $x_1 . x_2 = p \rightarrow p = \left(\frac{8}{3}\right).\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}$

Solución(c), por condición:

$$x_1^2 + x_2^2 = 40$$

Se sabe que $x_1 + x_2 = 4 \quad y \quad x_1 . x_2 = p$

Elevando al cuadrado la suma de las raíces

$$(x_1 + x_2)^2 = (4)^2 \rightarrow x_1^2 + 2x_1 . x_2 + x_2^2 = 16 \rightarrow x_1^2 + 2p + x_2^2 = 16$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 16 - 2p \rightarrow 40 = 16 - 2p \rightarrow 12 = -2p \rightarrow p = -12$$

RECONSTRUCION DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

Dado $x_1 \quad y \quad x_2$ las raíces de una ecuación de segundo grado, la fórmula que permite su reconstrucción es dado por:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0$$

Ejemplo:

Sean $x_1 = 2 + 3\sqrt{5} \quad y \quad x_2 = 2 - 3\sqrt{5}$, las raíces de una ecuación de segundo grado, reconstruir la ecuación que dio origen a estas raíces:

Por la fórmula:

$$x^2 - {}_{1} + x_2)x + x_1.x_2 = 0$$
$$(x$$
$$x^2 - (2 + 3\sqrt{5} + 2 - 3\sqrt{5})x + (2 + 3\sqrt{5})(2 - 3\sqrt{5}) = 0$$
$$x^2 - 4x + (4 - 45) = 0$$
$$x^2 - 4x - 41 = 0$$

Ejercicios propuestos

1. Resolver:

a. $(3x-4)^2 - x(3x-8) = 12$

b. $(x-4)(x+6) - (x+1)(2x+3) = x+1$

c. $3x^2 - 7x + 6 = 0$

2. Resolver

$$\frac{3x+1}{x-2} = \frac{3x+5}{x+7}$$

3. Resolver

$$(x-1)(2x+2)-(x-1)(x-3)=0$$

4. Sea

$\log 2 = a \qquad \log 3 = b \quad hallar: \quad 16^{2x+5} = 81^{x-1}$

5. Hallar el valor de "x"

$$((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{x}=4$$

6. Sea la ecuación : $x^2 - 7x + p = 0$

Hallar el valor de "p", tal que $x_1 + 3x_2 = 13$

7. Sea la ecuación de segundo grado, $x^2 + mx - 14 = 0$, con raíces $x_1 \quad y \quad x_2$, hallar el valor de "m" tal que $x_1 - x_2 = 14$

8. Sea la ecuación de segundo grado:

$2x^2 - 6x + 5 = 0 \quad con \quad raices \quad x_1 \; y \; x_2 \quad hallar: \quad x_1^2 + x_2^2$

9. Las raíces de una ecuación de segundo grado son:

$$x_1 = 1+3\sqrt{7} \quad y \quad x_2 = 1-3\sqrt{7}$$

Reconstruir la ecuación que dio origen a estas raíces

10. Si al cuadrado de la edad de Pedro, se le disminuye su quíntuplo resulta 150. ¿Qué edad tiene Pedro.

11. Sea la ecuación de segundo grado $x^2 - AX + 27 = 0$, calcular el valor de A , de tal forma que una raíz sea el triple de la otra.

12. En un cuadrado, la suma de su diagonal y un lado es $6+3\sqrt{2}$, calcular el área del cuadrado.

13. Calcular el valor de “x”, en:

a. $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=10$

b. $\frac{5x+1}{x+2}+\frac{7x+1}{x-2}=25.2$

c. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x-1}{x+1}=4$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Se llaman así aquellas ecuaciones en la cual la incógnita aparece como exponente.

Ejemplo

$2^{3x+7}=64$

Para resolver una ecuación exponencial, se debe tener en cuentas las siguientes igualdades:

$a^m = a^n \rightarrow m=n$

$a^m = b^m \rightarrow a=b$

$a^a = m^n \rightarrow a=m$

Resolver

$2^{3x+7}=64$

$2^{3x+7}=2^6 \rightarrow 3x+7=6 \rightarrow x=-\frac{1}{3}$ *Rpta.*

Resolver

$4^x+2^{2x+1}=24$

$(2^2)^x+2^{2x+1}=24 \rightarrow 2^{2x}+2^{2x}.2=24 \rightarrow 2^{2x}(1+2)=24$

$2^{2x}(3)=24 \rightarrow 2^{2x}=8 \rightarrow 2^{2x}=2^3 \rightarrow 2x=3 \rightarrow x=\frac{3}{2}$ *Rpta.*

Resolver

$(4^x)^{x-1}-1=0$

$4^{x(x-1)}=1 \rightarrow 4^{x(x-1)}=4^0 \rightarrow x(x-1)=0 \rightarrow x_1=0 \quad y \; x_2=1$

Resolver

$4^x + 2^{x+1} = 80$

$(2^2)^x + 2^x.2 = 80 \rightarrow (2^x)^2 + 2.(2^x) = 80 \rightarrow sea \quad 2^x = y$

$y^2 + 2y - 80 = 0 \rightarrow (y+10)(y-8) = 0 \rightarrow y = -10 \quad e \quad y = 8$

$\rightarrow 2^x = -10 \rightarrow x \notin R$

$\rightarrow 2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3 \quad Rpta.$

Resolver

$9^x + 12^x = 16^x$

Solución

$9^x + 12^x = 16^x$

$(3.3)^x + (3.4)^x = (4.4)^x$

$\frac{(3.3)^x}{(3.3)^x} + \frac{(3.4)^x}{(3.3)^x} = \frac{(4.4)^x}{(3.3)^x}$

$1 + (\frac{4}{3})^x = (\frac{4}{3})^{2x}$

$sea \quad m = (\frac{4}{3})^x$

$1 + m = m^2 \rightarrow m^2 - m - 1 = 0$

$m = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033989$

$(\frac{4}{3})^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow x = \log_{\frac{4}{3}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \quad Rpta.$

Ejercicios propuestos

1. $(2x-5)^{10}=(7x+15)^{10}$
2. $2^{3x-6}=(\frac{1}{8})^{3x-6}$
3. $5^{5x-20}=(\sqrt{25})^{x-3}$
4. $4^{x+1}+6^{x+1}=9^{x+1}$
5. $2^{3x}=(\frac{1}{16})^{x-6}$
6. $3^{5x-20}=(\sqrt{81})^{x-3}$
7. $3^{2-x}+3^{2+x}=82$
8. $Calcular: x \quad e \quad y$

$$\begin{cases} 2^{x+y}=15 \\ 2^{x-y}=5 \end{cases}$$

ECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas ecuaciones, en la cual la incógnita aparece dentro de una raíz, para calcular el valor o valores que toma la incógnita, hay que realizar transformaciones en la igualdad, conllevando muchas veces a soluciones extrañas, las cuales deben ser verificadas en la igualdad.

Ejemplos

Resolver

$\sqrt{2x+1}=3$

Solución

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$(\sqrt{2x+1})^2=(3)^2 \rightarrow 2x+1=9 \rightarrow 2x=4 \rightarrow x=4 \qquad Rpta.$

Resolver

$\sqrt[3]{x-1} = 3$

Solución

Elevando al cubo ambos miembros de la igualdad

$(\sqrt[3]{x-1})^3 = (3)^3 \rightarrow x-1 = 27 \rightarrow x = 28 \quad Rpta.$

Resolver

$\sqrt{x+3} + x = 2x - 3$

Solución

$\sqrt{x+3} + x = 2x - 3 \rightarrow \sqrt{x+3} = 2x - 3 - x \rightarrow \sqrt{x+3} = x - 3$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$(\sqrt{x+3})^2 = (x-3)^2 \rightarrow x + 3 = x^2 - 6x + 9 \rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow (x-1)(x-6) = 0$

$x_1 = 1 \; x_2 = 6$

comprobando, $x = 1$

$\sqrt{1+3} + 1 = 2(1) - 3 \rightarrow \sqrt{4} + 1 = 2 - 3 \rightarrow 3 = -1 \rightarrow$ $x = 1$ *no es respuesta*

comprobando, $x = 6$

$\sqrt{6+3} + 6 = 2(6) - 3 \rightarrow \sqrt{9} + 6 = 12 - 3 \rightarrow 9 = 9 \rightarrow$ $x = 6$ *es respuesta*

Ejercicios

1. $\sqrt{x+3} - 4 = 0$
2. $\sqrt[3]{3x+4} = 4$
3. $\sqrt[3]{3x+3} - x + 5 = 0$
4. $\sqrt{x+9} + x = 2x - 3$
5. $\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2x^2 - 3x = 0$
6. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-4} = 7$

CAPÍTULO VI
Razones y proporciones

Concepto

Razón
Es la comparación entre dos cantidades, esta comparación puede ser por diferencia (razón aritmética) o por cociente (razón geométrica)

Razón aritmética
Sea r el valor de la razón, resultado de comparar por diferencia las cantidades A y B.

$$r = A - B$$

Ejemplo
A= Carlos pesa 80 kg
B= Juan pesa 20 kg

$$r = 80 - 20 = 60 \quad kg \quad (carlos \quad pesa \quad 60 \quad kg \quad mas \quad que \quad juan)$$

Razón geométrica
Sea r el valor de la razón, resultado de comparar por cociente las cantidades A y B.

$$r = \frac{A}{B}$$

Ejemplo

A= Carlos pesa 80 kg
B= Juan pesa 20 kg

$$r = \frac{80}{20} = 4 \quad (el \quad peso \quad de\ carlos\ es \quad 4 \quad veces\ el \quad peso\ de \quad juan)$$

También se dice que: el peso de Carlos contiene 4 veces al peso de juan

Nota 1: en una razón, al valor de A se le lama antecedente y a B se le llama consecuente

Nota 2: el concepto de relación entre dos cantidades, se refiere a la razón geométrica.

Nota 3: se compara cantidades con las mismas unidades de medidas.

Proporción aritmética

Es la igualdad de 2 razones aritméticas.

Sean las razones aritméticas

$$r = A - B$$

$$r = C - D$$

$$la \quad proporcion \quad aritmetica \quad A - B = C - D$$

Nota 2: si el consecuente de la primera razón es igual al antecedente de la segunda razón, entonces:

$$r = A - B$$

$$r = C - D$$

$$B = C = x$$

$$la \quad proporcion \quad A - x = x - D \rightarrow 2x = A + D \rightarrow x = \frac{A + D}{2}$$

Ejemplo

En dos salones de clase, se eligen al azar a dos alumnos, si la edad del alumno del primer salón es de 17 años y la edad del alumno en el segundo salón es de 13 años, si la razón aritmética en ambos salones es de 2 años. Calcular las edades faltantes en cada salón.

Para el primer salón: $17 - B = 2 \rightarrow B = 15$

Para el segundo salón: $D - 13 = 2 \rightarrow D = 15$

Proporción geométrica

Es la igualdad de 2 razones geométricas.

Sean las razones geométricas:

$$r = \frac{A}{B}$$

$$r = \frac{C}{D}$$

$$la \quad proporcion \quad geometrica \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Nota: A y D se le llama extremos; B y C se le llama medios.

Nota: A y C se le llama antecedente; B y D se le llama consecuente

Teorema:

1. $AD = BC$
2. $\frac{A \pm B}{B} = \frac{C \pm D}{D}$
3. $\frac{A+B}{A-B} = \frac{C+D}{C-D}$
4. $\frac{A+C}{B+D} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$
5. $\frac{A}{B} = \frac{p}{q} \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{pk}{qk} \rightarrow A = pk \quad \wedge B = qk$
6. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = ... = \frac{M}{N} \rightarrow \frac{A+C+E+...+M}{B+D+F+...+N} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = ... = \frac{M}{N}$

Ejercicios

1. La razón geométrica de 2 números es 3/5, si la suma de los cuadrados es 306, calcular los números.

Solución

$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \qquad (1)$

$a^2 + b^2 = 306 \qquad (2)$

$de \quad (1) \quad a = 3k \quad \wedge b = 5k \quad (3)$

$(3) \quad en \quad (2) \quad (3k)^2 + (5k)^2 = 306 \quad \rightarrow 34k^2 = 306 \quad k^2 = 9 \rightarrow k = 3$

$luego \quad a = 3k = 3(3) = 9 \quad Rpta.$

$b = 5k = 5(3) = 15 \quad Rpta.$

2. Sea la razón geométrica

$\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$

$hallar \qquad M = \frac{\sqrt{ab}}{a} + \frac{9(a^2 - b^2)}{ab}$

$solución$

$sea \quad a = 1k \wedge b = 9k$

reemplazando en M

$$M = \frac{\sqrt{(k)(9k)}}{k} - \frac{9((k)^2 - (9k)^2)}{(k)(9k)} = \frac{\sqrt{9k^2}}{k} - \frac{9(k^2 - 81k^2)}{9k^2}$$

$$M = \frac{3k}{k} - \frac{9(-80k^2)}{9k^2} = 3 + 80 = 83 \quad Rpta.$$

3. Sea la razón geométrica

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{3}{5}$$

calcular $M = \dfrac{75(a+c+e)^3}{bdf}$

solucion

$a = 3k \quad b = 7k \quad c = 3k \quad d = 7k \quad e = 3k \quad f = 7k$

remplazando en $M = \dfrac{75(27k^3 + 27k^3 + 27k^3)}{(5k)(5k)(5k)} = \dfrac{75(81k^3)}{75k^3} = 81 \quad Rpta.$

4. Sea la razón geométrica

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6}$$

$$2a + b + 3c = 135$$

Calcular : $a \quad , \quad b \quad y \quad c$

solucion

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = k \rightarrow a = 5k \qquad b = 3k \quad c = 6k$$

$$2a + b + 3c = 279 \rightarrow 2(5k) + 3k + 3(6k) = 279 \rightarrow 31k = 279 \rightarrow k = 9$$

$a = 5(9) = 45 \quad Rpta.$

$b = 3(9) = 27 \quad Rpta.$

$c = 6(9) = 54 \quad Rpta.$

5. Las edades de tres hermanos suman 90 años, la edad del primero es 2/3 del segundo; y la edad del segundo es 3/5 del tercero. Calcular las tres edades.

$a+b+c=90$

$a=\frac{2}{3}b$

$b=\frac{3}{5}c$

Solución

$a+b+c=90$

$a=\frac{2}{3}b \rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{3}$

$b=\frac{3}{5}c \rightarrow \frac{b}{3}=\frac{c}{5}$

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=k \rightarrow a=2k \qquad b=3k \quad c=5k \quad sumando$

$a+b+c=10k=90 \rightarrow k=9 \quad \rightarrow a=18, \quad b=27, \quad c=45 \quad Rpta.$

6. Sean las relaciones:

$a^2+b^2+c^2=90$

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$

$calcular \quad E=abc$

Solución

$a^2+b^2+c^2=261$

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k \qquad a=2k \quad b=3k \quad c=4k$

$(2k)^2+(3k)^2+(4k)^2=261 \rightarrow 29k^2=261 \rightarrow k^2=9 \quad k=3$

$a=2(3)=6$

Ejercicios propuestos

1. La edad de Pedro es el triple la de Juan, si la suma de las edades es 72 años. Calcular ambas edades.
2. Los cuadrados de las edades de pedro y juan es 452 y su razón es de 7 a 8. Calcular ambas edades.
3. Sean las relaciones:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 244$$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6}$$

$$calcular \quad E = 4a + 5b + 6c$$

CAPÍTULO VII
Logaritmos

Sea N un número real positivo, sea b un número positivo diferente de la unidad llamado base y sea x un número real llamado exponente.

Definición de logaritmo
El logaritmo de un número N, en una base dada b, es igual a una cantidad x llamada exponente o sea el exponente es el logaritmo del número en la base dada, esta definición implica que el exponente x debe elevar a la base para obtener el número.

$$Logaritmo_b\, N = x \quad se\ escribe \quad \log_b N = x \rightarrow b^x = N$$

Ejemplo-1
Hallar el logaritmo de 32 en base 2

$$\log_2 32 = x \rightarrow 2^x = 32 \rightarrow 2^x = 2^5 \rightarrow x = 5$$

Se interpreta: 5 es el logaritmo de 32 en base 2

Ejemplo-2

Hallar el logaritmo $81\sqrt{3}$ de en base 9

$$\log_9 81\sqrt{3} = x \rightarrow 9^x = 81\sqrt{3} \rightarrow (3^2)^x = 3^4.3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{9}{2}}$$

$$3^{2x} = 3^{\frac{9}{2}} \rightarrow 2x = \frac{9}{2} \rightarrow x = \frac{9}{4}$$

Nota 1. Cuando la base del logaritmo es 10 se omite, es decir:

$$\log_{10} N = \log N$$

.

Nota 2. Cuando la base del logaritmo es el número inconmensurable e=2.718…, se escribe:

$$\log_e N = \ln N$$

Propiedades de los logaritmos
Logaritmo de la base

$$\log_b N \rightarrow si \quad N = b \rightarrow \log_b b = 1$$

Logaritmo de un producto

$$\log_b A.B = \log_b A + \log_b B$$

Logaritmo de un cociente

$$\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

Logaritmo de una potencia

$$\log_b A^n = n.\log A_b$$

Logaritmo de la potencia del número y la base

$$\log_b A = \log_{b^p} A^p = \log_{b^{\frac{1}{p}}} A^{\frac{1}{p}}$$

Logaritmo de cambio de base

$$\log_b A = \frac{\log_m A}{\log_m b} \rightarrow \log_b A.\log_m b = \log_m A$$

$m = base \quad cualquiera$

También:

$$\log_b A = x \rightarrow b^x = A \rightarrow b^{\log_b A} = A$$

Ejercicios

1. Calcular $\log_{\sqrt[3]{3}} 81$

solucion

$$\log_{\sqrt[3]{3}} 81 = x \rightarrow (\sqrt[3]{3})^x = 81 = 3^4 \rightarrow (3^{\frac{1}{3}})^x = 3^4 \rightarrow \frac{x}{3} = 4 \rightarrow x = 12 \quad Rpta.$$

2. Calcular : $\log_2 8 + \log_4 16$

Solución

$$\log_2 8 + \log_4 16 = \log 2_2^3 + \log 4^2_4 = 3\log 2 + \frac{2}{2}\log 4 = \frac{3}{4} + 2 = 5 \qquad Rpta$$

3. Hallar "x" en:

$\log_3 x + \log_2 x = 1$

solucion

$\frac{\log x}{\log 3} + \frac{\log x}{\log 2} = 1 \rightarrow \log x(\frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 2}) = 1 \rightarrow \log x(\frac{\log 2 + \log 3}{(\log 2)(\log 3)}) = 1$

$(\log x)(\log 6) = (\log 2)(\log 3) \rightarrow \log x = \frac{(\log 2)(\log 3)}{\log 6} \rightarrow x = 10^{\frac{(\log 2)(\log 3)}{\log 6}}$ *Rpta.*

4. Hallar "x" en:

$$\frac{1}{\log_2 (x+1)} + \frac{1}{\log_3 (x+1)} = 1$$

solucion

$\log_{x+1} 2 + \log_{x+1} 3 = 1$

$\log_{x+1}(2)(3) = 1 \rightarrow x+1 = 6 \rightarrow x = 5$ *Rpta.*

5. Hallar x en: $2^{2x+1} = 500$

Solución

$2^{2x+1} = 500 \rightarrow \log_2 500 = 2x + 1 \rightarrow \frac{\log 500}{\log 2} = 2x + 1 \rightarrow 8.96578 = 2x + 1 \rightarrow$

$x = 3.98289$

6. Despejar x en:

$$y = \frac{10^x - 10^{-x}}{2}$$

Solución

$2y = 10^x - 10^{-x}$

$2y = 10^x - \frac{1}{10^x} \rightarrow 2y.10^x = 10^{2x} - 1 \rightarrow (10^x)^2 - 2y(10^x) - 1 = 0$

Hacemos que $m = 10^x$

$m^2 - 2ym - 1 = 0$

$$m = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

$$m = y \pm \sqrt{y^2+1} \rightarrow 10^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \rightarrow x = \log(y \pm \sqrt{y^2+1})$$

Ejercicios propuestos

1. Hallar
   $Log_{\sqrt[3]{2}} 64$

2. Hallar el valor de x en:

   $12^{2x+3} = 6^{x-1}$

3. Calcular:

   $\log_2 2 \sqrt[3]{16}$

4. Calcular el valor de x en cada caso:

   $3^{x+1} = 100$

   $7^{3x-5} = 20^{x+1}$

   Nota: usar calculadora

5. Despejar el x en cada caso:
   $a^{x+1} = b^{2x-1}$

   $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

6. Si $Log\ 64 = a$ $Log\ 81 = b$, hallar el logaritmo de 2 en base 3

7. Hallar los valores de $x \quad e \quad y$

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 5 \\ 3^{x-y} = 7 \end{cases}$$

8. Hallar los valores de $x \quad e \quad y$

$$\begin{cases} \log_2 (x+y) = 2 \\ \log_3 (x-y) = 3 \end{cases}$$

9. Resolver

$$\log_2 (2x+1) + \log_3 (2x+1) = 1$$

10. Resolver

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$$

11. Resolver

$$\log_{x+1} 2 + \log_{x+1} 8 = 2$$

12. Resolver

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$$

13. Resolver

$$3^{\log_9 (x-8)} = 2$$

14. Resolver

$$1 + \log(x-1) = \log x$$

15. Resolver

$$2\log_3 (x+1) + \log_9 (x-1) = 2$$

CAPÍTULO VIII
Sucesiones y series numéricas

Concepto de sucesión
Es un conjunto de números reales, que sigue una ley de formación.

Ejemplo

$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 9,...$

A cada elemento se le llama término de la sucesión y se le representa por:

$a_1 = 1$
$a_2 = 3$
$a_3 = 5$
$a_4 = 7$
$a_5 = 9,...$
.
.
$a_n = 2n-1 \rightarrow ter\min o \quad general \quad de \quad la \quad sucesion$

Cada elemento es el resultado de sumarle al anterior la cantidad de 2, o que es lo mismo la diferencia entre dos cantidades consecutivas es 2. A este valor se le llama razón de la sucesión. Una sucesión numérica puede ser finita o infinita y se le representa por: $\{a_n\}$, siendo el elemento a_n el termino general de la sucesión, es decir en el ejemplo anterior a la sucesión, se le representa por:

$\{a_n\} = \{2n-1\} \qquad n = 1.2.3....$

Siendo el termino general:

$a_n = 2n-1 \qquad n = 1.2.3....$

Ejemplo

Sean las siguientes sucesiones, calcular su término general

1. 1, 4, 7, 10, 13,...

2. 2, 4, 8, 16, 32,...

3. 1, 4, 9, 16, 25, 36,...

Para la primera sucesión el término general es:

$a_n = 3n - 2 \quad \forall n = 1,2,3,..$

Para la segunda sucesión el término general es:

$a_n = 2^n \quad \forall n = 1,2,3,..$

Para la tercera sucesión el término general es:

$a_n = n^2 \quad \forall n = 1,2,3,..$

Las sucesiones más comunes son las aritméticas y las geométricas

Sucesiones aritméticas

Son sucesiones que tiene por ley de formación de sus términos a la siguiente expresión:

$a_n = a_1 + (n-1)r \qquad n = 1,2,3,...$

$donde:$

$a_n = ter\ \min o \quad general \quad o \quad ultimo \quad ter\ \min o \quad de \quad la \quad sucesion$

$a_1 = primer \quad ter\ \min o$

$n = numero \quad de \quad ter\ \min os \quad de \quad la \quad sucesion$

$r = razon \quad de \quad la \quad sucesion$

La razón “r” es la diferencia de un término cualquiera con el anterior.

Ejemplo 1

Calcular los términos de una sucesión, si el primer término es 4, el número de término es 7 y la razón es 3.

$a_1 = 4$

$n = 7$

$r = 3$

Utilizando la ley de formación los términos de la sucesión son:

$a_1 = 4 + (1-1)2 = 4$

$a_2 = 4 + (2-1)3 = 7$

$a_3 = 4 + (3-1)3 = 10$

$a_4 = 4 + (4-1)3 = 13$

$a_5 = 4 + (5-1)3 = 16$

$a_6 = 4 + (6-1)3 = 19$

$a_7 = 4 + (7-1)3 = 22$

La sucesión:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22

Ejemplo 1.

Sea la sucesión aritmética $2, \quad 7, 12, \quad 17, \ldots$

Calcular el término 50 de la sucesión.

De la formula general:

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{50} = ?$

$a_1 = 2$

$n = 50$

$r = 7 - 2 = 5$

$a_{50} = 2 + (50-1)5 = 247$ *Rpta*.

Sucesiones geométricas

Son sucesiones que tiene por ley de formación de sus términos a la siguiente expresión:

$a_n = a\, r_1^{\,n-1}$

donde :

$a_n = ter\ \min o \quad general \quad o\ ultimo \quad ter\ \min o \quad de\ la \quad sucesion$

$a_1 = primer \quad ter\ \min o$

$n = numero \quad de \quad ter\ \min o$

$r = razon \quad de\ la \quad sucesion$

La razón “r” es el cociente de un término cualquiera con el anterior.

Ejemplo 1

Calcular los términos de una sucesión geométrica, si el primer término es 3, la razón es 2 y el número de término es 5.

$a_1 = 3$

$n = 5$

$r = 2$

Utilizando la ley de formación los términos de la sucesión son:

$a_1 = 3(2)^{1-1} = 3$

$a_2 = 3(2)^{2-1} = 6$

$a_3 = 3(2)^{3-1} = 12$

$a_4 = 3(2)^{4-1} = 24$

$a_5 = 3(2)^{5-1} = 48$

La sucesión geométrica es:

$3, \quad 6, \quad 12, \quad 24, \quad 48$

Ejemplo 1.

Sea la sucesión geométrica: $2, \quad 6, 18, \quad 54,...$

Calcular el término 10 de la sucesión geométrica.

De la formula general:

$a_n = a\, r_1^{\,n-1}$

$a_{50} = ?$

$a_1 = 2$

$n = 10$

$r = \dfrac{6}{2} = 3$

$a_{50} = 2(3)^{10-1} = 39{,}366 \quad Rpta.$

Concepto de serie

Una serie es la suma de los términos de una sucesión, se le representa por la letra S_n

$$Sea \quad la \quad sucesion \quad \{a_n\}, con \quad ter\ \min os : a_1, a_2, a_3, ...a_n$$

Sean las siguientes series:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
.
.
$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Serie aritmética

Sea la sucesión aritmética para n términos:

$$a_1, \quad a_1 + r, \quad a_1 + 2r, \quad a_1 + 2r, ..., a_1 + (n-1)r$$

La serie aritmética para n términos:

$$S_n = a_1 + \quad a_1 + r + \quad a_1 + 2r + \quad a_1 + 3r + ... + a_1 + (n-1)r$$

Sumando en sentido inverso se tiene

$$S_n = a_1 + (n-1)r + \quad a_1 + (n-2)r + \quad a_1 + (n-3)r + \quad a_1 + (n-4)r + ... + a_1$$

Sumando miembro a miembro los n sumandos se tiene:

$$2S_n = 2a_1 + (n-1)r + 2a_1 + (n-1)r + 2a_1 + (n-1)r + \quad 2a_1 + (n-1)r + ... + 2a_1 + (n-1)r$$
$$2S_n = [2a_1 + (n-1)r]n = [a_1 + a_1 + (n-1)r]n = [a_1 + a_n]n$$
$$S_n = \frac{[a_1 + a_n]n}{2}$$

Ejemplo

Sea la serie aritmética sumar los 50 primeros términos
3, 5, 7, 9,...

Solución

Se necesita conocer el último término para aplicar la formula

$$a_n = a_1 + (n-1)r \rightarrow a_{50} = 3 + (50-1)2 = 101$$

La suma.

$$S_{50} = \frac{[3+101]50}{2} = 2{,}600 \quad Rpta.$$

Serie geométrica

Sea la sucesión geométrica para n términos:

$$a_1, \quad a_1 r, \quad a_1 r^2, \quad a_1 r^3, ..., a_1 r^{n-1}$$

La serie geométrica para n términos:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + ... + a_1 r^{n-1}$$

Multiplicando a cada término por la razón

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + ... + a_1 r^n$$

Restando miembro a miembro los n sumandos se tiene:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n = a_1 (1 - r^n) \rightarrow (1-r)S_n = a_1 (1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1 (1 - r^n)}{1 - r}$$

Ejemplo

Sea la serie geométrica sumar los 10 primeros términos
3, 6, 12, 24,...

Solución

Se necesita conocer la razón

$$r = \frac{6}{3} = 2$$

$$a_1 = 3$$

$$n = 10$$

$$S_{10} = \frac{3(1 - 2^{10})}{1 - 2} = 3{,}069 \quad Rpta.$$

Nota.

De la formula anterior

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n = a_1 (1 - r^n) \rightarrow (1 - r)S_n = a_1 (1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r}.(1 - r^n) \qquad para \quad |r| < 1$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

Ejemplo :

$$Sumar : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

$$la \quad razon \quad r = \frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{8} x \frac{4}{1} = \frac{1}{2} < 1$$

aplicando la formula $\lim ite$:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

CAPÍTULO IX
Desigualdad

Concepto

Es la comparación entre dos números (puntos) de la recta real. Sean a y b dos números de la recta real, entre ellos se estable las siguientes desigualdades:

$a > b$, *se lee* "a" *es mayor que* "b"

$a < b$, *se lee* "a" *es menor que* "b"

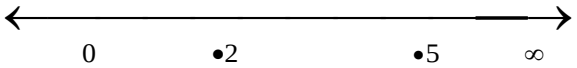
$a \geq b$, *se lee* "a" *es mayor o igual que* "b"

$a \leq b$, *se lee* "a" *es menor o igual que* "b"

Ejemplo-1

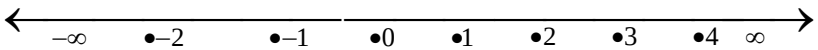
$5 > 2$, *se lee 5 es mayor que* 2

Gráficamente



Ejemplo-2

En la siguiente recta se establecen las siguientes desigualdades



$4 > 1$, *se lee* 4 *es mayor que* 1

$2 > -3$, *se lee* 2 *es mayor que* -3

$-1 > -2$, *se lee* -1 *es mayor que* -2

Nota: un número positivo que se encuentra más alejado del cero es mayor que cualquier número

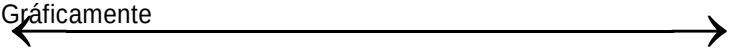
Nota: un numero negativo que se encuentra más alejado del cero es menor que cualquier número.

Ejemplo-3

Sea la siguiente desigualdad

$x \geq 2$, *se lee x toma valores mayores o iguales a* 2

Gráficamente



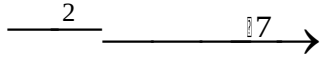
0 •2 ∞

Intervalos

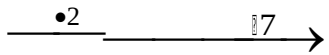
Concepto

Es un subconjunto de puntos de la recta real

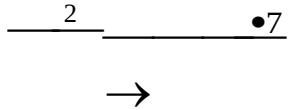
Ejemplo



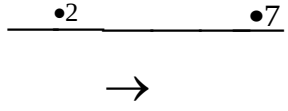
$< 2 \quad 7 >$ Abierto a la izquierda y abierto a la derecha, significa que el intervalo toma todos los puntos de la recta real entre 2 y 7, pero ambos no se consideran.



$[2 \quad 7 >$ Cerrado a la izquierda y abierto a la derecha, significa que el intervalo toma todos los puntos de la recta real entre 2 y 7, se considera el punto 2 pero no el punto 7.



$< 2 \quad 7]$ Abierto a la izquierda y cerrado a la derecha, significa que el intervalo toma todos los puntos de la recta real entre 2 y 7, no se considera el punto 2 pero si el punto 7.



$[2 \quad 7]$ Cerrado a la izquierda y cerrado a la derecha, significa que el intervalo toma todos los puntos de la recta real entre 2 y 7, se considera los dos puntos 2 y 7.

Ejemplo

Sean los intervalos

$A = [2 \quad 7 > \qquad B = [-2 \quad 5 >$

Hallar

$A^c,\ A\cap B,\quad A-B,\quad A\cup B,\quad A^c\cup B^c$

Solución:

$A^c =< -\infty \quad 2 > \cup \lceil 7 \quad \infty >$

$A\cap B = \lceil 2 \quad 5 >$

$A - B = \lceil 5 \quad 7 >$

$A\cup B = \lceil -2 \quad 7 >$

$A^c \cup B^c = (A\cap B)^c$ Por la ley de Morgan

$A^c \cup B^c = (A\cap B)^c =< -\infty \quad 2 > \cup \lceil 5 \quad \infty >$

Ejercicios propuestos

1. Sean los intervalos

$A = \lceil -2 \quad 9 >$

$B = \lceil 2 \quad 15 >$

Hallar

$A^c,\ A\cap B,\quad A-B,\quad A\cup B,\quad A^c\cup B^c$

2. Sean los intervalos

$A = \lceil 1 \quad 5 >$

$B = \lceil 3 \quad 8 >$

Hallar

$A^c,\quad A\cap B,\quad A-B,\quad A\cup B,\quad A^c\cup B^c$

3. Sean los intervalos

$A =< -2 \quad 5 >$

$B = \lceil 2 \quad 10 \rceil$

Hallar

$A^c, \quad A \cap B, \quad A - B, \quad A \cup B, \quad A^c \cup B^c$

4. Sean los intervalos

$A =< -2 \quad 5 >$

$B =< 2 \quad 10 >$

Hallar

$A^c, \quad A \cap B, \quad A - B, \quad A \cup B, \quad A^c \cup B^c$

5. Sean los intervalos

$A =< 3 \quad 5 >$

$B =< -2 \quad 4 >$

$A =< 4 \quad 7 >$

Hallar

$(A \cap B,) - C$

CAPÍTULO X
Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad algebraica, condicionado al valor o valores de las variables (llamadas incógnitas, solución o raíces). Una inecuación a diferencia de una ecuación admite por lo menos una solución.

Ejemplo

$2x + 5 > 13$

La inecuación, se cumple para infinitos valores de "x" mayores a 4 de la recta real.

Teoremas

a. Sea $a > b \rightarrow a \pm c > b \pm c$

b. Sea $a > b \rightarrow a.c > b.c \quad si \quad c > 0$

c. Sea $a > b \rightarrow a.c < b.c \quad si \quad c < 0$

d. $a.b > 0 \rightarrow a > 0 \wedge b > 0 \quad \vee \quad a < 0 \ \wedge b < 0$

Ejemplo

Resolver la inecuación

$2(x + 5) - 12 > 3(2x - 1) + 7$

$2x + 10 - 12 > 6x - 3 + 7$

$2x - 4x > -3 + 7 + 2$

$-2x > 6 \rightarrow -2x(-\frac{1}{2}) > 6(-\frac{1}{2}) \rightarrow x < -3 \quad (teorema \quad c)$

También la respuesta se da como $< -\infty \qquad -3 >$

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3(x - 3) > 6x - 10 & (1) \\ 3(5 - 2x) + 2x < x + 35 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo (1)

$2x + 3x - 9 > 6x - 10$

$$2x + 3x - 6x > -10 + 9$$

$$-x > -1 \rightarrow x < 1$$

Resolviendo (2)

$$15 - 6x + 2x < x + 35$$

$$-6x + 2x - x < 35 - 15$$

$$-5x < 20 \rightarrow 5x > -20 \rightarrow x > -4$$

De $x < 1 \quad \wedge \quad x > -4 \rightarrow < -4 \quad 1 >$

Ejemplo

Calcular el valor de x en la inecuación

$$2x + 12 > 20$$

Solución

$$2x + 12 > 20$$

$$2x > 20 - 12$$

$$2x > 8$$

$$x > 4$$

Es decir cualquier valor para x superior a 4 es solución de la inecuación, la respuesta se escribe de la siguiente forma:

$$x \in (4, \ \infty)$$

Ejemplo

Calcular el valor de x

$$2(x - 4) - 3x > 15$$

Solución

$$2(x - 4) - 3x > 15$$

$$2x - 8 - 3x > 15$$

$$-x > 23$$

$$x < -23 \rightarrow x \in (-\infty, \ -23)$$

Ejemplo

Calcular el valor de x en

$$(x - 2)(x - 5) > 0$$

Solución

$(x-2)(x-5)>0$

entonces

$x-2>0 \rightarrow x>2$

$x-5>0 \rightarrow x>5$

la intercción es $x>5$ *Rpta.*

$x-2<0 \rightarrow x<2$

$x-5<0 \rightarrow x<5$

la intercción es $x<2$ *Rpta.*

$x \in (-\infty,2) \cup (5,\infty)$ *Rpta. general*

Solución-2

$(x-2)(x-5)>0$

Consiste en igualar a cero cada factor, con el objetivo de obtener los puntos críticos.

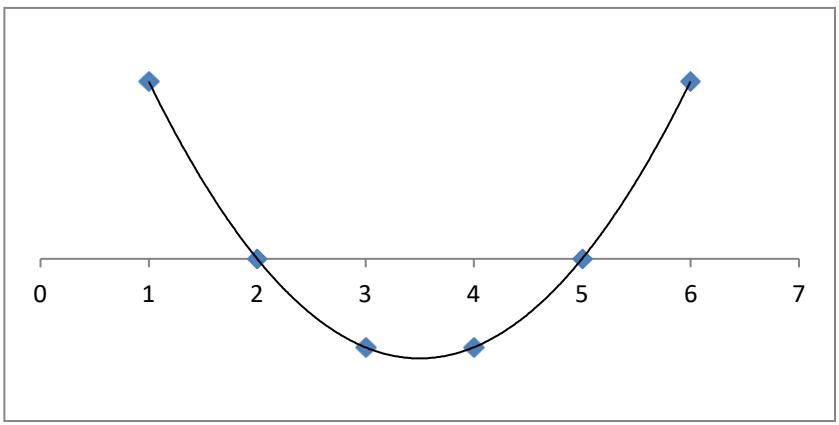
Estos puntos críticos son llevados a un plano cartesiano y sobre estos se pasa una curva de derecha a izquierda.

Si la inecuación es de la forma $f(x)>0$, se toma como solución los puntos de abscisa que satisfacen esta condición (la función toma valores positivos) y viceversa.

Puntos críticos

$x-2=0 \rightarrow x=2$

$x-5=5 \rightarrow x=5$



Del grafico la solución será:
$x \in (-\infty,2) \cup (5, \infty)$

Solucion-3
$(x-2)(x-5) > 0$

Se obtienen los puntos críticos, al igualar a cero cada factor.
Se eligen un valor al azar para cada intervalo formado por los puntos críticos.
Este valor elegido para cada intervalo se reemplaza a la inecuación, si este valor es positivo será solución de lo contrario no es solución para la inecuación.

$x-2=0 \rightarrow x=2$

$x-5=5 \rightarrow x=5$

$---------(2)---------(5)---------$

$x=0$	$x=3$	$x=6$
$(-)(-)=+$	$(+)(-)=-$	$(+)(+)=+$

Del cuadro la solución es:
$x \in (-\infty,2) \cup (5, \infty)$

Ejercicios propuestos
Resolver por cualquiera de los métodos:

1. $\dfrac{x-4}{x-10} > 0$
2. $(x-4)(x+7) < 0$
3. $(x-1)(x+5)(x-4) > 0$
4. $x(x-7) > 0$
5. $\dfrac{(-x-2)}{(x-4)} > 0$
6. $(-x-5)(x+7) > 0$
7. $\dfrac{(x-4)(x+5)}{(x-6)} > 0$
8. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 0$
9. $(x-1)(x+1)(x-4) > 0$

10. $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
11. $(x - 2)(x + 7) < 0$
12. $(x - 3)(x + 3)(x + 4) > 0$
13. $x^2 - 4x + 2 > 0$
14. $x^2 - 9 > 0$
15. $\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-7)} > 0$

CAPÍTULO XI
Tanto por ciento

Concepto
Consiste en dividir una cantidad en 100 partes iguales, y cada parte de esta cantidad es equivalente al 1%

Ejemplo
Sea 500 la cantidad, lo dividimos entre 100 partes iguales y cada parte 5 unidades, representa o equivale al uno por ciento, que se escribe por 1%

$$\frac{500}{100} = 5 \ unidades \quad representa\ al \quad 1\% = \frac{1}{100} \quad de\ la \quad cantidad \quad dada$$

Es decir

$$1\% = \frac{1}{100} \quad de \quad 500 = \frac{1}{100}(500) = 5 \quad unidades$$

Ejemplo

Sea 40 unidades el total, luego $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ corresponde a cada una de las 100 partes de 40, $\frac{2}{5}$ representa al 1%

Si tomamos 10 veces 2/5, que es igual a 4, representa al 10%; es decir

$$\underbrace{\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + ... + \frac{2}{5}}_{10\ veces} = \frac{20}{5} = 4 \rightarrow 10\% \ (se\ lee\ 4\ representa\ al\ 10\ por\ cientos\ de\ 40)$$

De otra forma el 10% de 40

$$10\%\ de\ 40 = \frac{10}{100} x 40 = 4 \quad unidades$$

Nota: para calcular el equivalente de porcentaje de una parte del todo, realizamos una regla de tres simple.

Ejemplo

250 nuevos soles que tanto por ciento es de 500 nuevos soles.

$$500 \rightarrow 100\%$$
$$250 \rightarrow x$$
$$x = \frac{250(100\%)}{500} = 50\%$$

250 es el 50% de 500.

Ejemplo
Calcular el 50% de 500 nuevos soles

$$500 \rightarrow 100\%$$
$$x \rightarrow 50\%$$
$$x = \frac{500(50\%)}{100\%} = 250 \quad nuevos \quad soles$$

De otra forma:

$$50\% \quad de \quad 500$$
$$50(1\%) \quad de \quad 500 = 50(\frac{1}{100})(500) = 250 \quad nuevos \quad soles$$

Otros ejemplos:

Ejemplo-1

Por la compra de una camisa, cuyo precio es de 40 nuevos soles recibo un descuento del 10% de su precio. ¿ Qué precio tengo que pagar ?.

$$40 - 10\% \; de \; 40 = 40 - \frac{10}{100}(40) = 40 - 4 = 36$$

Pago 36 nuevos soles.
De otra forma, si el descuento es del 10%, entonces pago su complemento 90% del precio; es decir,
90% de 40=0.9 (40)=36 nuevos soles.

Ejemplo-2
Por la compra de un artefacto, cuyo precio de venta es de 1200 nuevos soles, recibo dos descuentos sucesivos del 12% y 15%, cual es el precio a pagar.

El primer descuento es del 12%, luego pago (1-0.12) de 1200; es decir (1-0.12)1200=1056, sobre este nuevo pago recibo un descuento de 15%, luego pago (1-0.15) de 1056; es decir, (1-0.15)1056=897.6, es el precio a pagar por el artefacto.

Ejemplo-3

Si el precio del artículo es P, y recibo tres descuentos sucesivos del a%, b% y c%, el precio que se paga es:

$$(1-\frac{a}{100})(1-\frac{b}{100})(1-\frac{c}{100})(P)$$

Ejemplo-4

Por la compra de un artefacto recibo dos descuentos sucesivos, el primero es de 15% y el segundo 10, pagando la suma de 11,475 nuevos soles, cual es el precio inicial del artefacto.

$x = precio\ inicial$

$x - 15\%(x) = x - 0.15x = 0.85x \rightarrow pago$

$0.85x - 10\%(0.85x) = 0.85x - 0.1(0.85x) = (0.85)(1-0.1)x = (0.85)(0.9)x \rightarrow ultimo \quad pago$

$0.85(0.9)x = 11{,}475 \rightarrow x = \frac{11{,}475}{(0.85)(0.9)} = S/.15{,}000$

Ejemplo-5

La base de un triángulo se incrementa en un 12% y su altura en un 20%, en qué % se incrementa el área del nuevo triangulo y en cuanto aumento el área.

$A = \frac{bh}{2} \rightarrow b_1 = b + 12\%b = b + 0.12b = 1.12b \rightarrow h_1 = h + 20\%h = h + 0.2h = 1.2h$

$A_1 = \frac{b_1 h_1}{2} = \frac{(1.12b)(1.2h)}{2} = \frac{1.344bh}{2} = 1.344(\frac{bh}{2}) = 1.344\,A$

por regla de tres

$A \rightarrow 100\%$

$A_1 \rightarrow x$

$x = \frac{A_1}{A}(100\%) = \frac{1.344\,A}{A}(100\%) = 134.4\%$

$Incremento = 134.4\% - 100\% = 34.4\%$

$El\ area \quad aumento = A_1 - A = 1.344\,A - A = 0.344\,A$

Ejemplo-6

Por la compra de un artefacto, recibo un descuento de 20% pagando 800 nuevos soles, cual es el precio inicial del artefacto.

$x = el \quad precio \quad inicial \quad del \quad artefacto$

$x - 20\% \quad de \quad x = 800 \quad enunciado$

$$x - \frac{20}{100}.x = 800 \rightarrow x - 0.2x = 800 \rightarrow 0.8x = 800 \rightarrow x = \frac{800}{0.8} = S/.1{,}000$$

Ejercicios propuestos

1. Calcular el 25% de 900
2. 225 que porcentaje es de 900
3. Calcular el 12% de 20% de 800
4. Calcular el 32% de 0.125
5. Por la compra de una chompa, recibo un descuento del 25% pagando solo 750 nuevos soles. ¿Cuánto me descontaron?
6. Por la compra de un artefacto recibo tres descuentos sucesivo de 10%, 5% y 2%, pagando solo 3,351.6 nuevos soles. ¿Cuál es el precio inicial del artefacto?
7. Si el lado de un cuadrado se incrementa en un 20%. ¿En qué % se incrementa el área del nuevo cuadrado?.
8. Si el radio de un circulo se incrementa en un 35%.¿En qué % se incrementa el área del nuevo circulo?.
9. Si la base un triángulo disminuye en un 10% y su altura aumenta en un 20%. Calcular el área del nuevo triangulo.
10. Si la base un triángulo se incrementa en un 30%, y su altura aumenta en un 20%. ¿Calcular en cuanto aumenta la nueva área y en que porcentaje.

Interés simple

Concepto

Es la ganancia por un dinero que se presta a una persona o se deposita a un banco, por algún acuerdo de convivencia (interés y tiempo).

Ejemplo 1

Supongamos que 400 nuevos soles se presta a una persona, ganando una tasa de interés del 10% anual en un tiempo de 4 años

¿Cuánto es mi ganancia en un año?

$400 \rightarrow 100\%$

$x \rightarrow \quad 10\%$

$$x = \frac{400(10\%)}{100\%} = S/.40$$

Luego en 4 años mi ganancia será de 40(4)=160 nuevos soles.
Generalizando se tiene la siguiente formula

$$I = \frac{C * R * T}{100} \quad (\textit{primera} \quad \textit{formula})$$

$donde$:

$C = capital$

$R = \text{int}\, eres \quad que \quad se \quad paga \quad por \quad el \quad prestamo \quad del \quad capital$

$T = tiempo \quad que \quad dura \quad el \quad prestamo$

Del ejemplo anterior
C=400
R=10% anual
T=4 años

Aplicando la formula

$$I = \frac{C * R * T}{100} = \frac{400(10)(4)}{100} = S/.160$$

Nota: R es anual, de no serlo convertirlo a través de una regla de tres simple.

El tiempo T, también es anual de no serlo convertirlo a través de una regla de tres simple, si está en meses, se divide entre 12 y si es en días se divide entre 360, luego la primera fórmula quedaría como:

$$I = \frac{C * R * T}{1200} \qquad T = meses \quad (\textit{segunda} \quad \textit{formula})$$

$$I = \frac{C * R * T}{36000} \qquad T = dias \quad (\textit{tercera} \quad \textit{formula})$$

Del ejemplo 1, si el tiempo en lugar de 4 años, fuese de 48 meses, se aplicaría la segunda fórmula anterior

$$I = \frac{C * R * T}{1200} = \frac{400(10)(48)}{1200} = S/.160$$

Del ejemplo 1, si la tasa de interés es de 5% semestral, entonces, si en un semestre gano el 5% en 2 semestres que es igual a un año gano 10%, aplicaría la primera fórmula y el resultado ya se conoce.

Otro concepto, es el de monto (M), otros lo llama capital final. Es la suma del capital prestado (C) más la ganancia ganada por el préstamo (I).

$$M = C + I$$

$$M = 4000 + 160 = S/.560$$

Ejercicios

1. Presto 2000 nuevos soles a un amigo, por 18 meses a una tasa de interés anual del 5%, cual será mi ganancia al cabo de este tiempo.
   C=2000
   T=18 meses
   R=5%
   Aplicamos la segunda fórmula de tiempo en meses

$$I = \frac{C * R * T}{1200} = \frac{2000(5)(180)}{1200} = S/.150$$

   Si el tiempo de 18 meses lo convertimos en año, es decir 18 meses equivale a 1.5 años, aplicamos la primera formula

$$I = \frac{C * R * T}{1200} = \frac{2000(5)(1.5)}{100} = S/.150$$

2. Se presta 5000 nuevos soles a una tasa mensual del 0.75%, por un periodo de tiempo de 3 años, 2meses y 20 días, calcular el interés ganado.
   C=5000
   R=0.75% mensual=0.75%(12)=9%
   T=3 años, 2 meses y 20 días= 3 años+2/12 años+20/360 años=3.22222=29/9 años.

   Reemplazando en la primera formula

$$I = \frac{C * R * T}{100} = \frac{5000(9)(29/9)}{100} = S/.1450$$

3. Un préstamo de dinero, a una tasa de interés de 5% capitalizándose trimestralmente, arrojo un interés simple de 20,000 nuevos, en un tiempo de 4 años, 15 meses y 45 días soles. ¿Cuál es el capital inicial?
   C=?
   R=5% interés capitalizándose trimestralmente
   I=20,000 nuevos soles
   T=4 años, 15 meses y 45 días
   Como la tasa de interés se capitaliza trimestralmente, anualmente seria 4(5%)=20% anualmente (ganancia anual)
   Convirtiendo el tiempo en años aplicando el factor unidad, se tiene:

$$4\ años + 15\ meses(\frac{1\ año}{12\ meses}) + 45\ dias(\frac{1\ año}{360\ dias}) = 5.375\ años$$

   Aplicando la fórmula de años

$$I = \frac{C * R * T}{100}$$

$$20000 = \frac{C(20)}{100}(5.375) \rightarrow C = S/.18{,}604.65116$$

Interés compuesto

Concepto

El préstamo de un dinero C, a una tasa de interés anual R y a un tiempo T, la ganancia obtenida anualmente se capitaliza hasta culminar el tiempo.

Ejemplo

Una persona presta a una empresa 5000 nuevos soles a una tasa anual de 15%, capitalizado en 5 años. Que monto recibirá al cabo del tiempo pactado.

El primer año recibirá

$$M_1 = C + \frac{C * R * T}{100} = 5000 + \frac{5000(15)(1)}{100} = 5000 + 5000(0.15)(1) = S/.5750$$

$$M_1 = 5000(1 + 0.15)^1 = 5750$$

$$en\ los\ \ años\ \ siguientes:$$

$$M_2 = 5000(1 + 0.15) + 5000(1 + 0.15)(0.15)(1) = 5000(1 + 0.15)^2$$

$$M_3 = 5000(1 + 0.15)^3$$

$$M_4 = 5000(1 + 0.15)^4$$

$$M_5 = 5000(1 + 0.15)^5 = S/.10{,}056.78594$$

Generalizando la formula, se tiene:

$$M_t = C(1 + \frac{R}{100})^t = C(1 + i)^t$$

$siendo$

$C = capital \quad inicial$

$R = tasa \quad de \quad \text{int}\, eres \quad anual$

$t = tiempo \quad anual$

$M_t = monto \quad recibido \quad al \quad cabo \quad del \quad tiempo \quad t$

Ejemplo

Recibo un préstamo de 15,000 nuevos soles a interés compuesto a una tasa de interés anual del 12%, por un periodo de tiempo de 30 meses, cuál será el monto a pagar al finalizar la transacción.

$C = 15000$

$R = 12\% \quad anual$

$$t = 30 \quad meses \rightarrow 30 meses(\frac{1 \quad año}{12 \quad meses}) = \frac{30}{12} \quad años$$

$M_t = ?$

$$M = 15000(1 + 0.12)^{\frac{30}{12}} = 19{,}912.98267$$

Otra forma, convirtiendo la tasa de interés anual a mensual, cálculo de interés mensual

$$1 + i = (1 + i_m)^{12} \rightarrow 1 + 0.12 = (1 + i_m)^{12} \rightarrow 1.12 = (1 + i_m)^{12} \rightarrow \sqrt[12]{1.12} = 1 + i_{12}$$

$$i_{12} = \sqrt[12]{1.12} - 1 \rightarrow i_{12} = 0.009488792 \quad tasa \quad de \, \text{int}\, eres \quad mensual$$

$$M = 1500(1 + 0.009488792)^{30} = 19{,}912.98267$$

Ejemplo

Se recibe un préstamo de 20000 nuevos soles a una tasa de interés compuesto anual del 12% capitalizable trimestralmente, cual es el monto recibido al cabo de los siguientes tiempos:

1. En un año
2. En dos años
3. En 25 meses
4. En 2 años, 25 meses, 100 días

C=20000

R=12% anual capitalizable trimestralmente
T=1 año

Para la pregunta 1
El año tiene 4 trimestre, si se capitaliza trimestralmente (se acumula el dinero cada tres meses), entonces la tasa trimestral será 12%/4; también para el tiempo, se trabaja con trimestre (T=1año=4 trimestre)

Aplicando la fórmula:

$$M_{4\ trimestre} = 20000(1+\frac{12\%}{4})^4 = 22{,}510.1762$$

Para la pregunta 2
La tasa de interés anual que se capitaliza trimestralmente es 12%/4, para el tiempo en trimestre es 2(4)=8, aplicando la fórmula:

$$M_{8\ trimestre} = 20000(1+\frac{12\%}{4})^8 = 25{,}335.4016$$

Para la pregunta 3
La tasa de interés anual que se capitaliza trimestralmente es 12%/4, para el tiempo en trimestre, se convierte 25 meses en trimestre=25/3, aplicando la fórmula:

$$M_{\frac{25}{3}\ trimestre} = 20000(1+\frac{12\%}{4})^{\frac{25}{3}} = 25{,}586.2635$$

Para la pregunta 4
La tasa de interés anual que se capitaliza trimestralmente es 12%/4, para el tiempo en trimestre, se convierte 2 años, 25 meses y 100 días a trimestre=2(4)+25/3+100/90=17.44444, aplicando la fórmula:

$$M_{17.44444\ trimestre} = 20000(1+\frac{12\%}{4})^{17.44444} = 33{,}494.0951$$

Nota:
1 año=360 días=12 meses=2 semestre=4 trimestre=6 bimestre
1mes=30 días

CAPÍTULO XII
Análisis combinatorio

El objetivo de este capítulo es presentar las técnicas y fórmulas que permiten determinar el total de grupos que se pueden formar con los elementos de uno o más conjuntos.

Factorial de un número natural

Concepto

El factorial de un número "n", es el producto de los números naturales consecutivos a partir del 1 hasta el numero n. se denota por n!.

$$n\,!= (1)(2)(3)....(n-1)(n) = (n)(n-1)....(3)(2)(1)$$

Ejemplos

$$3\,!= (1)(2)(3) = 6$$

$$5\,!= (1)(2)(3)(4)(5) = 120$$

Nota:

$$0\,!=1$$

$$n\,!= (n)(n-1)....(3)(2)(1) = n\,(n-1)!$$

Grupos

Concepto

Es un subconjunto de elementos elegidos de un conjunto dado. Dentro del grupo los elementos pueden o no repetirse y además tomando en cuenta el orden o no tomando en cuenta el orden.

Ejemplo

Sea el conjunto A, con elementos 1, 2 y 3, formar todos los grupos (números) de tamaño 2

1. Sin repetirse y no tomando en cuenta el orden

   12 13 23 se forman 3 grupos(números)

2. Sin repetir y tomando en cuenta el orden

   12 13 23
   21 31 32 se forman 6 grupos(números)

3. Con repetición y tomando en cuenta el orden

12	13	23	
21	31	32	se forman 9 grupos(números)
11	22	33	

Con un solo conjunto

- Si se tiene un conjunto con "n" elementos diferentes, todos los posibles grupos que se pueden formar, si se toman "r" elementos (para $r \leq n$), sin tomar en cuenta el orden y sin reemplazo, es dado por:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Si se tiene un conjunto con "n" elementos diferentes, todos los posibles grupos que se pueden formar, si se toman "r" elementos (para $r \leq n$), sin tomar en cuenta el orden y con reemplazo, es dado por:

$$C_r^{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

- Si se tiene un conjunto con "n" elementos diferentes, todos los posibles grupos que se pueden formar, si se toman "r" elementos (para $r \leq n$), tomando en cuenta el orden y sin reemplazo, es dado por:

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Un caso particular, es cuando $r = n$, luego $V_n^n = P_n = n!$

- Si se tiene un conjunto con "n" elementos diferentes, todos los posibles grupos que se pueden formar, si se toman "r" elementos (para $r \leq n$), tomando en cuenta el orden y con reemplazo, es dado por:

$$n^r$$

- Si se tiene un conjunto con "n" elementos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales,..., n_p son iguales, donde se cumple que $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$, luego el total de permutaciones para los "n" elementos es:

$$\frac{n!}{(n_1!)(n_2!)...(n_p!)}$$

Con dos o más conjuntos

- Principio de la multiplicación
  Un acontecimiento puede ocurrir de "a "formas diferentes, otro de "b" formas diferentes, y así sucesivamente, hasta que un acontecimiento puede ocurrir de "m" formas diferentes; entonces el total de formas que puede ocurrir un acontecimiento completo (tomando un solo elemento de cada conjunto), es dado por:
  $(a)(b)...(m)$

- Principio de la suma
  Un acontecimiento puede ocurrir de "a" maneras diferentes, otro de "b" maneras diferentes, y así sucesivamente, hasta que un acontecimiento puede ocurrir de "m" maneras diferentes. Suponiendo que los acontecimientos son mutuamente excluyentes(es decir si ocurre uno de los acontecimientos ya no pueden ocurrir otro); entonces cualquiera de los acontecimientos pueden ocurrir por la suma de las maneras; es decir,
  $a + b + ... + m$

Ejercicios resueltos

1. Para ir a la Universidad nacional de ingeniería (UNI), se dispone de 8 líneas diferentes del metropolitano o de 4 líneas diferentes de microbús, de cuantas maneras diferentes se puede llegar a la UNI.

   Como los dos eventos son excluyentes(es decir si utilizo cualquier línea del metropolitano ya no podrá usar cualquier línea de microbús y viceversa) el total de maneras es dado por la suma de cada acontecimiento:
   8+4=12

2. Sean los dígitos $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, se eligen 3 dígitos sin reemplazo, cuántos números de tres cifras se pueden formar.

   Como el número a formarse es de tres dígitos, el primer digito se puede elegir de 4 maneras diferentes; como es sin remplazo el segundo digito se puede elegir de 3 maneras diferentes y por último el tercer digito se puede elegir de 2 maneras diferentes. Por lo tanto el total de números de tres dígitos que se pueden formar es dado por $(4)(3)(2) = 24$

   Por formula $V_3^4 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4x3x2x1}{1} = 24$

   Si la elección es con reemplazo, por el principio de la multiplicación (4)(4)(4)=64

3. Sean los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, se eligen 3 dígitos al azar y con reemplazo para formar un número. Hallar el total de números que se pueden formar en los siguientes casos:

   a. Formar todos los posibles números.
      Como las extracciones son con reemplazo, el primer, segundo y tercer digito pueden ocurrir de 9 formas diferentes, entonces por el principio de la multiplicación se tiene:

9	9	9

      El total de formas diferentes de formar números con tres dígitos es dado por la multiplicación de 9x9x9=729.

   b. Formar números pares
      Un número es par cuando la última cifra es par o cero, entonces el último digito puede ocurrir de 4 formas diferentes (2,4,6,8) y como es con reemplazo o restitución el primer y segundo digito pueden ocurrir de 9 formas diferentes, entonces por el principio de la multiplicación se tiene:

9	9	4

El total de número pares que se pueden formar con tres dígitos es dado por la multiplicación de 9x9x4=324.

c. Formar números mayores que 500
El primer digito puede ocurrir de 5 formas diferentes para que sea mayor a 500 (5,6,7,8,9), y como es con restitución el segundo y tercer digito pueden ocurrir de 9 formas diferentes, entonces por el principio de la multiplicación se tiene:

5	9	9

El total de números que se pueden forman con tres dígitos mayores a 500 es dado por la multiplicación de 5x9x9=405.

d. Formar números de tal manera que el digito 3 se encuentre en el centro.
El primer digito puede ocurrir de 9 formas diferentes, el segundo digito puede solo ocurrir de una 1 sola forma (corresponde al número 3) y tercer puede ocurrir de 9 formas, entonces por el principio de la multiplicación se tiene:

9	1	9

El total de números que se pueden formar, de tal manera que el número 3 se encuentre en el centro es dado por la multiplicación de 9x1x9=81.

e. Formar números de tal manera que sea mayor a 500 y par.
El primer digito puede ocurrir de 5 formas diferentes, el segundo digito puede ocurrir de 9 formas diferentes y el tercer digito puede ocurrir de 4 formas diferentes, entonces por el principio de la multiplicación se tiene:

5	9	4

El total de números que se pueden formar, de tal manera que el número sea par y mayor a 500, es dado por la multiplicación de 5x9x4=180.

4. Sean los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, se eligen 3 dígitos al azar y sin reemplazo para formar un número. Hallar el total de números que se pueden formar en los siguientes casos:

a. Formar todos los posibles números.

Como las extracciones son sin reemplazo, el primer, segundo y tercer dígitos pueden ocurrir respectivamente de 9, 8 y 7 formas diferentes, entonces por el principio de la multiplicación se tiene:

9	8	7

El total de números con tres dígitos es dado por la multiplicación de 9x8x7=504.

b. Formar números pares
Un número es par cuando la última cifra es par o cero, entonces el último digito puede ocurrir de 4 formas diferentes (2,4,6,8) y como es sin restitución el primer y segundo digito pueden ocurrir de 8 y 7 formas diferentes, entonces por el principio de la multiplicación se tiene:

8	7	4

El total de número pares que se pueden formar con tres dígitos es dado por la multiplicación de 8x7x4=224.

c. Formar números mayores que 500
El primer digito puede ocurrir de 5 formas diferentes para que sea mayor a 500 (5,6,7,8,9), y como es sin restitución el segundo y tercer digito pueden ocurrir de 8 y 7 formas diferentes, entonces por el principio de la multiplicación se tiene:

5	8	7

El total de números que se pueden forman con tres dígitos mayores a 500 es dado por la multiplicación de 5x8x7=280.

d. Formar números de tal manera que el digito 3 se encuentre en el centro.
El primer digito puede ocurrir de 8 formas diferentes, el segundo digito puede solo ocurrir de una 1 sola forma (corresponde al digito 3) y el tercer puede ocurrir de 7 formas por ser sin restitución, entonces por el principio de la multiplicación se tiene:

8	1	7

El total de números que se pueden formar, de tal manera que el número 3 se encuentre en el centro es dado por la multiplicación de 8x1x7=56.

e. Formar números de tal manera que sea mayor a 500 y par.
Este problema se debe resolver por partes, tomando en cuenta el tercer digito par:

Para el tercer digito par 2, el primer digito puede ocurrir de 5(5,6,7,8,9) formas diferentes, el segundo digito puede ocurrir de 7(1,3,4,6,7,8,9), se tiene:
2

5	7	1

Para el tercer digito par 4, el primer digito puede ocurrir de 5(5,6,7,8,9) formas diferentes, el segundo digito puede ocurrir de 7(1,2,3,6,7,8,9), se tiene:
4

5	7	1

Para el tercer digito par 6, el primer digito puede ocurrir de 4(5,7,8,9) formas diferentes, el segundo digito puede ocurrir de 7(1,2,3,4,7,8,9), se tiene:
6

4	7	1

Para el tercer digito par 8, el primer digito puede ocurrir de 4(5,6,7,9) formas diferentes, el segundo digito puede ocurrir de 7(1,3,4,6,7,8,9), se tiene:
8

4	7	1

El total de números que se pueden formar, de tal manera que el número sea mayor a 500 y par, es dado por la suma de 35+35+28+28=126.

5. En una reunión asisten 4 varones y 6 mujeres, se eligen a 4 personas sin tomar en cuenta el orden y sin restitución, cuantos grupos de personas se pueden formar en los siguientes casos:
   a. Todos los posibles grupos que se pueden formar.

$$C_4^{10} = \frac{10!}{(4!)(6!)} = 210$$

   b. Todos los posibles grupos en la cual existan 3 varones y 1 mujer.

$$C_3^4 . C_1^6 = 24$$

c. Todos los posibles grupos en la cual existan 2 varones y 2 mujeres.

$$C_2^4 . C_2^6 = 90$$

d. Todos los posibles grupos en la cual dos personas aparezcan juntas

$$1.C_2^8 = 28$$

e. Todos los posibles grupos en la cual dos personas no aparezcan juntas

$$C_4^{10} - 1.C_2^8 = 210 - 28 = 182$$

6. En una urna contiene 2 bolitas rojas, 1 verde y 1 negra, se eligen 4 bolitas sin reemplazo. Determinar el total de grupo a formarse

$$\frac{4!}{(2!)(1!)(1!)} = 12$$

Ejercicios propuestos

1. Sean los dígitos $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, se eligen 4 dígitos al azar y con reemplazo para formar un número. Hallar:
   a. ¿Cuántos números pares se pueden formar.
   b. ¿Cuántos números son mayores a 5000.
   c. ¿Cuántos números son menores que 7000.
   d. ¿Cuántos números son mayores a 3000 pero menor a 8000.
   e. ¿Cuántos números son mayores a 3500.
   f. ¿Cuántos números contienen al digito 5.

2. En un estante existe 3 libros de historia, 4 de literatura y 2 de música, se eligen 2 libros sin reemplazo. Hallar todas las posibles combinaciones.

3. En una reunión asisten 5 varones y 3 damas, se elige 2 personas al azar. Hallar todas las posibles combinaciones.

4. Un bibliotecólogo para codificar revistas científicas dispone de los siguientes dígitos $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, de cuantos códigos de 4 dígitos se dispone en cada caso:
   a. Se toma en cuenta el orden y con reemplazo
   b. Se toma en cuenta el orden y sin reemplazo
   c. No se toma en cuenta el orden y sin reemplazo

5. Un cliente del Banco de la Nación tiene la posibilidad de escoger 4 de los siguientes 10 dígitos { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} como clave de su tarjeta Multired, Hallar todas las posibles combinaciones bajos las siguientes restricciones:
   a. Está permitido elegir un mismo digito(elección con reemplazo)
   b. No está permitido elegir un mismo digito(elección sin reemplazo)
   c. Que el número elegido sea par(con reemplazo y sin reemplazo)
   d. Que el número elegido sea impar(con reemplazo y sin reemplazo)
   e. Que el número elegido sea superior a 5000(con reemplazo y sin reemplazo)
   f. Que el número elegido sea inferior a 5000(con reemplazo y sin reemplazo)
   g. Que el número elegido se encuentre entre 5000 y 8000(con reemplazo y sin reemplazo)
   h. Que el primer digito sea 4(con reemplazo y sin reemplazo)
   i. Que el último digito sea 4(con reemplazo y sin reemplazo)
   j. Que el segundo digito sea 0(con reemplazo y sin reemplazo)

6. En una reunión de una prestigiosa empresa dedicada a la producción de llantas para automóviles asisten 12 varones y 8 mujeres, después de acaloradas discusiones se desea formar una comisión para analizar la estrategias de ventas: Dicha comisión debe estar integrada por 5 personas. Hallar todas las posibilidades de elegir a las 5 personas bajo las siguientes condiciones:
   a. Elegir a cualquiera de ellos
   b. Que todos sean del sexo varón
   c. Que todos sean del sexo mujer
   d. Que haya 3 varones y 2 mujeres
   e. Que una mujer determinada presida el grupo
   f. Que un varón determinado presida el grupo
   g. Que una mujer este excluida del grupo
   h. Que un varón este excluido del grupo

7. En una urna hay 4 bolas blancas, 5 rojas y 3 amarillas, se selecciona en forma aleatoria 5 bolas, cuantas formas existen de elegir las 5 bajo las siguientes modalidades:
   a. 2 sean blancas y 3 de otro color, sin reemplazo y sin considerar el orden de extracción.
   b. 3 sean blancas y 2 de otro color , con reemplazo y sin considerar el orden de extracción
   c. 2 sean amarillas y 3 de otro color, con reemplazo y considerando el orden de extracción.
8. Una persona para llegar a cierta ciudad tiene que hacer uso de los siguientes medios de transportes; tiene 3 líneas de ómnibus para llegar a determinado paradero y 4 líneas de ómnibus para llegar al paradero final. ¿De cuántas formas diferentes puede llegar al paradero final?.
9. En una urna existen 4 bolas rojas y 3 bolas blancas, se elige al azar 3 bolas con reemplazo. ¿Cuántas formas diferentes existen de elegir las 3 bolas?.
10. En un estante existen 5 libros de física de diferentes autores, 4 de matemáticas de diferentes autores y 3 libros de químicas de diferentes autores. ¿ cuántas formas existen de elegir tres libros de diferentes materias?.
11. De la pregunta anterior, Hallar las formas de elegir tres libros al azar con reemplazo.
12. De la pregunta 10, Hallar las formas de elegir tres libros al azar sin reemplazo.
13. De la pregunta 10, Hallar las formas de elegir tres libros al azar sin con reemplazo, si un libro de física siempre debe aparecer en el centro.
14. De la pregunta 10, Hallar las formas de elegir tres libros al azar con reemplazo, si un libro de física siempre debe aparecer en el centro.
15. En una biblioteca concurren 50 alumnos, de los cuales 30 son varones, se eligen al azar 10 alumnos, de cuantas formas se pueden elegir 5 varones y 5 mujeres.
16. Sean los dígitos $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, se eligen 3 dígitos sin reemplazo, cuántos número de tres cifras menor o igual a 231 se pueden formar
17. En una biblioteca concurren 50 alumnos, de los cuales 30 son varones, se eligen al azar 10 alumnos, de cuantas formas se pueden elegir 6 varones y 4 damas.
18. Probar que:

$$C_r^n - C_r^{n-1} = C_{r-1}^{n-1}$$

19. Una base de datos contiene 20 libros de matemática, 10 de física y 8 de computación. Se eligen sin reemplazo 5 libros determinar:
    a. Todos los posibles grupos de 5 libros.
    b. Todos los posibles grupos que contenga 3 de matemática, 1 de física y 1 de computación.
    c. Todos los posibles grupos de la misma materia

20. En un salón de clase existen 20 estudiantes, de los cuales 12 tienen más de 18 años. Se eligen a 5 personas. Cuantos grupos se pueden formar con 3 personas con más de 18 años.

CAPÍTULO XIII
Sumatoria simple y doble

Sumatorias simples

Sea X, una variable cuantitativa en estudio que toma valores $x_1, x_2, ..., x_n$, la suma de los valores $x_1 + x_2 +,...,+ x_n$, se representa mediante el operador matemático $\sum_{i=1}^{n} x_i;$ que significa sumar todos los valores xi, para "i" que toma valores enteros positivos consecutivos desde 1 hasta n; es decir:

$$x_1 + x_2 +,...,+ x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Donde:

$x_i =$ Valor que toma la variable X, en la i-ésima observación

Ejemplos:

1. Desarrollar de las siguientes sumatorias

$$\sum_{i=1}^{5} x_{2i+1} = x_3 + x_5 + ... + x_{11}$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_{2i}^2 = x_2^2 + x_4^2 + ... + x_{12}^2$$

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{2x_{i+1}}{y_{2i+1}} = \frac{2x_2}{y_3} + \frac{2x_3}{y_5} + ... + \frac{2x_5}{y_9}$$

$$\sum_{i=1}^{5} (x_i - 7)^2 = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 + ... + (x_5 - 7)^2$$

2. Supongamos que una variable X, toma los siguientes valores:

$x_1 = 7 \quad x_2 = 9 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 6$

Calcular: $\sum_{i=1}^{4} \frac{i}{2x_i^2 + 3}$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\square_i 2x^2+3}{x_i-2}=\frac{\square_1 2x^2+3}{x_1-2}+\frac{\square_2 2x^2+3}{x_2-2}+\frac{\square_3 2x^2+3}{x_3-2}+\frac{\square_4 2x^2+3}{x_4-2}$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\square_i 2x^2+3}{x_i-2}=\frac{2(7)^2+3}{7-2}+\frac{2(9)^2+3}{9-2}+\frac{2(5)^2+3}{5-2}+\frac{2(6)^2+3}{6-2}$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\square_i 2x^2+3}{x_i-2}=20.2+23.57+17.67+18.75=80.19$$

3. Supongamos que una variable X toma los siguientes valores:

$x_1=-2 \quad x_2=1 \quad x_3=-4 \quad x_4=3$

Calcular: $\sum_{i=1}^{4}(x_i+2)^2$

$$\sum_{i=1}(x_i+2)_2=(x_1+2)_2+(x_2+2)_2+(x_3+2)_2+(x_3+2)_2$$

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i+2)^2=(-2+2)^2+(1+2)^2+(-4+2)^2+(3+2)^2=38$$

Calcular: $\sum_{i=1}^{4}(2x_i+3)(x_i-7)$

$$\sum_{i=1}^{4}(2x_i+3)(x_i-7)=(2x_1+3)(x_1-7)+(2x_2+3)(x_2-7)\ldots+(2x_4+3)(x_4-7)$$

$$\sum_{i=1}^{4}(2x_i+3)(x_i-7)=(2(-2)+3)((-2)-7)+(2(1)+3)((1)-7)\ldots+(2(3)+3)((3)-7)$$

$$\sum_{i=1}^{4}(2x_i+3)(x_i-7)=-2$$

De otra forma

En una tabla establecer varias columnas, la primera para el subíndice que toma la variable, la segunda para los valores que toma la variable X , la tercera para el primer factor, la cuarta para el segundo factor y la quinta para el producto de los dos factores, luego para la tercera y cuarta columna se calculan los valores numéricos para cada valor de la variable y para la quinta el producto de los valores obtenidos en los pasos anteriores, y la suma de estos valores es el resultado pedido.

i	x_i	$2x_i+3$	x_i-7	$(2x_i+3)(x_i-7)$
1	-2	-1	-9	9
2	1	5	-6	-30
3	-4	-5	-11	55
4	3	9	-4	-36
				-2

Es decir: $\sum_{i=1}^{4}(2x_i+3)(x_i-7)=9-30+55-36=-2$

Propiedades de las sumatorias simples

Sea la sumatoria:

$$\sum_{i=a}^{b} x_i ,$$

Siendo a y b números enteros ($a \le b$) , y el subíndice "i" que toma valores enteros consecutivos desde "a" hasta "b", donde: el valor de "a" es el límite inferior y "b" es el límite superior de la sumatoria. Teniendo en cuenta la definición de sumatoria, se tienen las siguientes propiedades matemáticas:

i. El número de términos o sumandos de una sumatoria es igual al límite superior menos el límite inferior más la unidad; es decir,
$N^{o}\ Tér\min os = b-a+1$

ii. La sumatoria de un valor constante, es igual a la constante multiplicada por el número de términos de la sumatoria; es decir, sea $x_{\substack{i\\b}} = m \quad \forall i = a,\ a+1, a+2,...,b$, entonces:

$$\sum_{i=a} m = m(b-a+1)$$

Siendo: m la constante

iii. La sumatoria de una constante multiplicada por una variable, es igual a la constante por la sumatoria de la variable; es decir:

$$\sum_{i=a}^{b} mx_i = m\sum_{i=a}^{b} x_i$$

Siendo: m la constante

iv. Sea la combinación lineal $x_i = ny_i \pm pz_i \pm q$, la sumatoria de los x_i para $i = a,\ a+1,\ a+2,...,\ b.$, es igual a:

$$\sum_{i=a}^{b} x_i = \sum_{i=a}^{b} (ny_i \pm pz_i \pm q) = n\sum_{i=a}^{b} y_i \pm p\sum_{i=a}^{b} z_i \pm q(b-a+1)$$

Siendo: n, p, q constantes

Sumatorias dobles

Sea X , una variable en estudio, cuyo valor es el resultado de observar simultáneamente dos características a una unidad elemental, valor que toma doble subíndice x_{ij} , representa el valor que toma la variable X en la $i = ésima\ \ fila$ (primera variable) y la $j = ésima\ columna$ (segunda variable), por lo tanto si se tiene "a" filas y "b" columnas, la suma total de los valores de la variable X se puede representar por la doble sumatoria; es decir,

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{ij}$$

Ejemplo: desarrollar

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} x_{ij}\right) = \underbrace{\sum_{j=1}^{3} x_{1j} + \sum_{j=1}^{3} x_{2j}}_{\text{desarrollando el subindice "i"}} = \underbrace{x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23}}_{\text{desarrollando el subindice "j"}}$$

Propiedades de las sumatorias dobles

Sea la sumatoria doble:

$$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} x_{ij}$$

Siendo a, b, c, d números enteros positivos, y los subíndices "i", "j" toma valores consecutivos desde "a" hasta "b" y desde "c" hasta "d" respectivamente; los valores "a" y "c" son los límites inferiores, y "b" y "d" son los límites superiores de la doble sumatoria.

Teniendo en cuenta la definición de sumatoria doble, se tienen las siguientes propiedades matemáticas:

i. El número de términos de una doble sumatoria es igual al producto del número de términos de la primera sumatoria con el número de términos de la segunda sumatoria; es decir:

$$N^{o}\ T\acute{e}r\min os = (b-a+1)(d-c+1)$$

ii. La doble sumatoria de una constante, es igual a la constante multiplicada por el número de términos de la sumatoria; es decir, sea $x_{ij} = m, \quad \forall ij$, entonces:

$$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} m = m(b-a+1)(d-c+1)$$

Siendo: m la constante

iii. La doble sumatoria de una constante multiplicada por una variable, es igual a la constante por la doble sumatoria de la variable; es decir:

$$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} mx_{ij} = m\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} x_{ij}$$

Siendo: m la constante

iv. Sea la combinación lineal $x_{ij} = ny_{ij} \pm pz_{ij} \pm q$, la doble sumatoria de los x_{ij} , es igual a:

$$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} x_{ij} = \sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} (ny_{ij} \pm pz_{ij} \pm q) = n\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} y_{ij} \pm p\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} z_{ij} \pm q(b-a+1)(d-c+1)$$

Siendo: n, p, q constantes

Notación puntual para una sumatoria doble

Sea la tabla de doble entrada (conocida como tabla de contingencia)

"i" \ "J"	1	2	3	…	k	Total
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1k}	$x_{1.}$
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2k}	$x_{2.}$
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3k}	$x_{3.}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
r	x_{r1}	x_{r2}	x_{r3}	…	x_{rk}	$x_{r.}$
Total	$x_{.1}$	$x_{.2}$	$x_{.3}$	…	$x_{.k}$	$x_{..}$

De la tabla la suma de los r elementos de la primera columna $x_{11}+x_{21}+x_{31}+...+x_{r1}=\sum_{i=1}^{r} x_{i1}$; al valor de la sumatoria $\sum_{i=1}^{r} x_{i1}$ se le representa mediante la siguiente notación puntual $x_{.1}$; es decir,

$$\sum_{i=1}^{r} x_{i1}=x_{.1}$$

$x_{.1}$ = corresponde a la sumatoria simple de todos los elementos x_{i1}, para "i" que toma valores desde 1 hasta r, de la primera columna.

De la tabla la suma de todos los elementos de la 1ra fila

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+...+x_{1k}=\sum_{j=1}^{k} x_{1j}=x_{1.}$ (Corresponde a la sumatoria simple de todos los elementos x_{1j}, para "j" que toma valores desde 1 hasta k, de la primera fila)

También de la tabla

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}=\sum_{i=1}^{r} x_{i.}=x_{..}$$

1.1. Ejercicios resueltos

1. Sean $\sum_{i=1}^{50} x_i=20$ *y* $\sum_{i=1}^{50} x_i^2=100$ *hallar*: $\sum_{i=1}^{50}(3x_i-4)^2$

Solución

$$\sum_{i=1}^{50}(3x_i-4)_2=\sum_{i=1}^{50}(9x_{2\,i}-24x_{\;i}+16)=\sum_{i=1}^{50}9x_{\;i}^{\;2}-\sum_{i=1}^{50}24x_{\;i}+\sum_{i=1}^{50}16=$$

$$=9\sum_{i=1}^{50}x_{\;i}^{2}-24\sum_{i=1}^{50}x_{\;i}+16(50-1+1)=9(100)-24(20)+16(50)=1220$$

2. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+5x_i+5)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i+1)(x_i+2)(x_i+3)(x_i+4)$$

Solución

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+5x_i+5)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i+1)(x_i+2)(x_i+3)(x_i+4)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+5x_i+5)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i+1)(x_i+4)(x_i+2)(x_i+3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+5x_i+5)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+5x_i+4)(x_i^2+5x_i+6) \quad (1)$$

Supongamos que $y_i=x_i^2+5x_i$, luego reemplazando en (1) se tiene

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i+5)^2-\sum_{i=1}^{n}(y_i+4)(y_i+6)=\sum_{i=1}^{n}\left\{(y_i+5)^2-(y_i+4)(y_i+6)\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{(y^2+10y_i+25)-(y_i^2+10y_i+24)\right\}=\sum_{i=1}^{n}\{1\}=1(n-1+1)=n$$

3. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+x_{..})$$

Solución

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - x_{i.} - x_{.j} + x_{..}) =$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{ij} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{i.} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{.j} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{..}$$

$$= x_{..} - b\sum x_{i.} - a\sum x_{.j} + abx_{..}$$

=

$$x_{..} - bx_{..} - ax_{..} + abx_{..} = (1-a)(1-b)x_{..}$$

4. Sean: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 100$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i = 5$, Calcular el valor de

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - 10)^2}{n}$$

Desarrollando el numerador de la sumatoria y aplicando las propiedades:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - 10)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 20x_i + 100) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 20\sum_{i=1}^{n} x_i + 100n = 100 - 20(5) + 100n = 100n$$

Luego se tiene que: $\frac{100n}{n} = 100$

5. De la tabla

i	x_i	y_i
1	4	5
2	5	6
3	2	-4
4	3	5
5	2	7

Calcular el valor de : $\sum_{i=1}^{5} 2(7x_i^2 - 5y_i^3)^2$

$$\sum_{i=1}^{5} 2(7x_i^2 - 5y_i^3)^2 = 2\sum_{i=1}^{5} (7x_i^2 - 5y_i^3)^2$$

De la tabla

i	x_i	y_i	$7x_i^2$	$5y_i^3$	$7x_i^2 - 5y_i^3$	$(7x_i^2 - 5y_i^3)^2$
1	4	5	112	625	-513	263169
2	5	6	175	1080	-905	819025
3	2	-4	28	-320	348	121104
4	3	5	63	625	-562	315844
5	2	7	28	1715	-1687	2845969
Suma						4365111

$$\sum_{i=1}^{5} 2(7x_i^2 - 5y_i^3)^2 = 2(4'365,111) = 8'730,222$$

1.2. Ejercicios Propuestos:

De la tabla que se presenta a continuación:

k	1	2	3	4	5
x_k	2	1	0	3	1

Calcular:

1. $\sum_{k=1}^{5} (5 + 3x_k)^2$

2. $\sum_{k=1}^{5}(x_k^2 - x_k + 1)^2$

3. $\sum_{k=1}^{5}\left\{(x_k - \bar{x})^2 - (x_k + \bar{x})^2\right\}$ donde $\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{5} x_k}{5}$

4. $\sum_{k=1}^{5}\left\{(5x_k - 4)(5x_k + 4)\right\}$

5. $\left\{\sum_{k=1}^{5}(x_k - 1)^3\right\}^2$

6. $\sum_{k=1}^{5}(x_k - 5)\sum_{k=1}^{5}(x_k + 5)$

7. De la información dada en la tabla, si a cada valor se le incrementa en un 40% más 3 unidades. Hallar la suma de los cuadrados de los nuevos valores.

Dada las siguientes expresiones simplificar:

8. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, siendo $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

9. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})x_i - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, siendo $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

10 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + n\bar{x}\bar{y}$

Donde: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$

11. Sea $y_i = ax_i \pm c$ para $i = 1,2,...,n$, calcular el valor de $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$

12. Sea $\sum_{i=1}^{5}(x_i - 3)^2 = 18$ donde $\sum_{i=1}^{5} x_i = 7$ Calcular el valor de $\sum_{i=1}^{5}(x_i + 3)^2$

13. Sea $\sum_{i=1}^{5}(x_i + 5)^2 = 200$, calcular el valor de $\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2$, donde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = 1$

Sean X e Y dos variables que toman valores tal como se presenta en la tabla.

i	1	2	3	4	5
x_i	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85
y_i	60	65	70	75	80

Calcular:

14. $\sum_{i=1}^{5}(2x_i + y_i)^2$

15. $\sum_{i=1}^{5}\{2(x_i+\bar{x})(y_i-\bar{y})-11\}$, siendo rqqqqqqqqq $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}$

$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}$

16. $\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})x_i}$, siendo $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}$

$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}$

17. $\sum_{i=1}^{5}\frac{\sqrt{x_i+y_i}}{x_i y_i}$

18. $\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2-\sum_{i=1}^{5}(x_i-x)^2$, siendo $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}$

$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}$

19. Calcular el valor de "M" en : $\sum_{i=1}^{5}(x_i-M)^2=10$, Siendo:

$\sum_{i=1}^{5}x_i=15$ y $\sum_{i=1}^{5}x_i^2=55$

Dada la siguiente tabla de doble entrada con valores x_{ij}

i \ j	1	2	3	4
1	2	1	0	0
2	4	1	2	3
3	0	2	0	1

Calcular las siguientes sumatorias:

20. $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(x_{ij} - \bar{x}_{..})^2$

21. $\sum_{i=1}^{3}(x_{i.}^2 + \sum_{j=1}^{4} x_{.j}^2 + x_{..}^2)$

22. $\sum_{j=1}^{4}(x_{.i} + 2)^2$

23. $\sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{4} x_{ij})^2$

24. $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(x_{.j}^2 + x_{i.....j}^2 - x_{.j}^2 + 24x)$

25. Sea la siguiente ecuación $\sum_{i=1}^{n}(x_i + 2) = 5n$, Hallar en valor de:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

26. Hallar la suma de los coeficientes al desarrollar:

$$\sum_{i=1}^{5}(3x_i + 5y_i)^{12}$$

27. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} 2^{i} - 2\sum_{i=0}^{n} 2^{n-i}$$

En un asiento minero de Cerro de Pasco, para un mes determinado, la administración hace la distribución del personal de ingenieros por turno y modalidad de trabajo, tal como se presenta en la tabla:

Modalidades / Turnos	Tajo Abierto =1	Socavón = 2	Seguridad = 3
Turno =1	16	20	2
Turno =2	30	40	2
Turno =3	0	70	4

Donde X ij = corresponde al número de ingenieros para el i-ésima turno en la j-ésima modalidad de trabajo. Para cada caso expresar por sumatoria y calcular su valor:

28. Total de ingenieros que laboran en el 1er. y 3er turno, para todas las modalidades.
29. Total de ingenieros que laboran en el 1er. y 3er. Turno, para las modalidades de trabajo: tajo abierto y seguridad.
30. Si los ingenieros del 1er. turno ganan “b-a” nuevos soles, para los del 2do. Turno “b” nuevos soles y para los del tercero “b+a” nuevos soles. Cual es el total a pagar por la administración en ese mes.
31. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + 13x_i + 41)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i + 5)(x_i + 6)(x_i + 7)(x_i + 8)$$

32. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_i + y_j - x_i = y_j)^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_i^2 + y_j^2 - x_j x_i - y_i y_j)$$

Donde : $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{a} x_i}{a}$ y $\bar{y} = \dfrac{\sum_{j=1}^{b} y_j}{b}$

33. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + 5x_i^2 + 5)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + 1)(x_i + 2)(x_i^2 + 3)(x_i^2 + 4)$$

34. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{n+1}(x_i - \bar{x})x_i - \sum_{i=1}^{n+1}(x_i - \bar{x})^2$$

35. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$$

36. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(5x_{i.} + 5x_{.j} - 2x_{1.} - 2x_{2.})$$

37. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 + a\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2$$

38. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{a+1}\sum_{j=1}^{b+1} x_{ij} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{ij}$$

39. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - x_{i.})x_{.j} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - x_{.j})x_{i.}$$

40. Sea $x_1, x_2, ...x_{100}$, una muestra de 100 datos, cuya suma de sus valores es igual a 400. Si a cada dato se le incrementa en 5% de su valor más la unidad, calcular la nueva suma.

41. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - x_{..})x_{ij} \qquad \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{ij}^2 - \frac{1}{ab}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{ij}\right)^2$$

42. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{i.} + \bar{x}_{.j} + x_{ij} + x_{.j} + x_{i.})$$

43. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij})^2$$

44. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{11}(x_i + 1)x_i - \sum_{i=1}^{12}(x_i + 4)(x_i - 3) + \sum_{12}^{12}(x_i + 12)(x_i - 11)$$

45. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})(\bar{x}_{i.} - \bar{x}..)$$

46. Sea

$$w_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

donde

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Calcular el valor de: $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$

47. La Empresa de transporte San Francisco S.A, cuenta con 4 vehículos cuya ruta comprende los distritos del Callao con la Molina. Se define a la variable en estudio Xij= Numero de boletos entregados a los usuarios en el i-ésimo vehículo para el j-ésimo turno, tal como se presenta en el siguiente cuadro:

Vehículos / Turnos	Vehículo=1	Vehículo=2	Vehículo=3	Vehículo=4
Turno=1	400	500	600	600
Turno=2	300	400	400	300
Turno=3	400	400	400	400

Expresar mediante sumatorias y calcular su valor

48. El Total de boletos expedidos a los usuarios del 1er y 3er turno para todos los vehículos de la empresa.
49. Si el precio para el tercer turno es el doble del precio del 2do y el precio del primer turno es la mitad del 2do turno, siendo el precio del 2do turno igual a “q” nuevos soles.
50. El total de boletos expedidos por los tres turnos para el 1ro y 4to vehículo.
51. Simplificar

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})(y_j-\bar{y})z_i-n\bar{z}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})y_j\ ,$$ siendo:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \qquad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n} \qquad \bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i}{n}$$

52. Dada la siguiente tabla con valores x_{ij} = Valor que toma la variable X en la i-ésima fila y j-ésima columna.

i \ j	1	2	3
1	2	1	2
2	3	2	0
3	2	2	3
4	4	1	2

Calcular:

a. $\sum_{i=1}^{4}(x_{i.}-\bar{x}_{..})^2$

b. $\sum_{i=1}^{4}\frac{\sum_{j=1}^{3}x_{ij}}{\sum_{j=1}^{3}x_{j,4-j}}$

c. $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}(x_{i.}-\bar{x}_{.j})^2$

53. Expresar mediante sumatorias las siguientes sucesiones de términos:

a. $x_{1j}^{1}+x_{2j}^{2}+x_{3j}^{3}+\ldots+x_{kj}^{k}$

b. $x_{1,2}^{1}+x_{2,3}^{2}+x_{3,4}^{3}+\ldots+x_{k,k+1}^{k}$

c. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\ldots+\frac{x_k}{x_{k+1}}$

d. $(x_1+y_2)^1+(x_2+y_3)^4+(x_3+y_4)^9+\ldots(x_k+y_{k+1})^{k^2}$

54. Sea la tabla de datos:

i	x_i	y_i
1	**5**	**1**
2	**4**	**2**
3	**3**	**3**
4	**2**	**4**
5	**1**	**5**

Calcular: $\sum(x_i^2+2x_iy_i+y_i^2)^2$

55. Sea la tabla de datos:

i	x_i	y_i	z_i
1	**2**	**3**	**3**
2	**1**	**2**	**2**
3	**1**	**3**	**4**
4	**2**	**2**	**1**
5	**1**	**2**	**2**

Calcular:

a) $\sum_{i=1}^{5}(x_i + y_i)(x_i + z_i)(y_i + z_i)$

a) $\sum_{i=1}^{5}(x_i + 2)(y_i + 3)(z_i - 5)$

b) $\sum_{i=1}^{5}(4x_i + 3y_i - 5z_i)(x_i + 2y_i - 3z_i)$

c) $\sum_{i=1}^{5}\left[x_i(x_i + 2y_i) + y_i(y_i + 2z_i) + z_i(z_i + 2x_i)\right]$

d)

Anexo I
BALOTARIO DE PREGUNTAS

1. $Sea \quad \frac{a}{b}=\frac{7}{9} \quad ademas \quad a+b=32 \quad hallar:"b"$

   a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) NA

2. La edad de Juan es 10 años mayor que la de Pedro, la edad de Luis es 5 años menor que la de Juan. Si la suma de los tres es 75 años. Hallar la edad de Juan.

   a) 15 b) 28 c) 29 d) 30 e) NA

3. Sean:

   $\frac{3a-3}{3}=\frac{3b-5}{4}=\frac{3c+8}{5} \quad ademas \quad a+b+c=120 \quad hallar:"a"$

   a) 30 b) 31 c) 32 d) 33 e) NA

4. Sean: $\frac{2}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{162} \quad hallar:"a"$

   a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) NA

5. Sean:

   $\frac{12}{a}=\frac{13}{b}=\frac{14}{c} \quad ademas \quad a+b+c=117 \quad hallar:"a"$

   a) 35 b) 36 c) 37 d) 38 e) NA

6. Sean:

   $\frac{12}{a}=\frac{13}{b}=\frac{14}{c} \quad ademas \quad 2a+3b+4c=357 \quad hallar:"a"$

   a) 36 b) 37 c) 38 d) 39 e) NA

7. Sea la ecuación de segundo grado, con raíces Sean: $x_1 \quad y \quad x_2$ $x^2+mx-14=0$, hallar el valor de "m" tal que $x_1-x_2=14$

   a) $\pm\sqrt{110}$ b) $\pm\sqrt{120}$ c) $\pm\sqrt{130}$ d) $\pm\sqrt{140}$ e) NA

8. Los lados de un triángulo rectángulo, son tres números consecutivos, tal que la suma es 12, hallar su hipotenusa.

   a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) NA

9. Los lados de un triángulo rectángulo, son tres números consecutivos, tal que la suma es 12, hallar su área.
   a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) NA

10. *Sea* $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{3}$ *ademas* $a+b=30$ *hallar* :"b"
   a) 27 b) 28 c) 29 d) 30 e) NA

11. Sea la progresión aritmética: $^{1,}\ \ ^{12,}\ \ ^{23}$, hallar el termino 30 avo.
   a) 300 b) 310 c) 320 d) 330 e) NA

12. Resolver la ecuación $\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = 3$
   a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) NA

13. El cuarto término de una progresión aritmética es 10, y el sexto es 16. Hallar el 2do. termino.
   a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) NA

14. El primer término de una progresión aritmética es -1, y el decimoquinto es 27. Hallar la razón.
   a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) NA

15. Hallar el ángulo mayor de un cuadrilátero sabiendo que están en progresión aritmética, siendo la razón 20°.
   a) 100° b)110° c) 120° d) 140° e) NA

16. El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 8 cm. Calcula los otros dos, sabiendo que los lados del triángulo forman una progresión aritmética. Hallar el cateto mayor.
   a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) NA

17. La suma de los términos de una progresión aritmética, es 27 y la suma de sus cuadrados es 261. Hallar el mayor de ellos.
   a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) NA

18. El 2º término de una progresión geométrica es 6, y el 5º es 48. Hallar el primer término.
   a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) NA

19. El 1er término de una progresión geométrica es 3, y el 8º es 384. Hallar la razón.
   a) 2 b) 7 c) 8 d) 9 e) NA

20. Calcula el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 4 y la razón es 5.
a) 448 b) 449 c) 500 d) 520 e) NA

21. El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la razón es 4. Halla el primer término.
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) NA

22. Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 4, la razón 7 y el último 88, halla el número de términos.
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) NA

23. El producto de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 80 y la razón es 3. Halla el primer término.
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) NA

24. ¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión aritmética 2, 8, 14,... para obtener como resultado 1064?
a) 18 b) 19 c) 20 d) 21 e) NA

25. Sabiendo que el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la razón es 2, hallar la suma de los nueve primeros términos.
a) 162 b) 163 c) 164 d) 165 e) NA

26. Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Hallar la edad menor.
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) NA

27. Calcula el término undécimo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.

a) 1000 b)1024 c) 1048 d) 1080 e) NA

28. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla el tercer término.
a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) NA

29. Halla el producto de los ocho primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24,...

a) $3^8.2^{28}$ b) $3^9.2^{28}$ c) $3^8.2^{29}$ d) $3^8.2^{30}$ e) NA

30. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24,...

a) 3068 b) 3069 c) 3070 d) 3071 e) NA

31. Halla x para que x - 1, x + 1, 2(x + 1) estén en progresión geométrica.
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) NA

32. Las edades de tres estudiantes están en progresión aritmética, si la suma es 30 y su producto es 960. Hallar la edad menor
a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) NA

33. El segundo término de una progresión aritmética es 7 y el sexto 23. Hallar la suma de sus términos.
a) 78 b) 79 c) 80 d) 81 e) NA

34. La edad de Carlos y Manuel suman 39 años, Carlos tiene el doble de la edad de Manuel, que edad tienen Carlos.
a) 26 b) 27 c) 28 d) 29 e) NA

35. Resolver la ecuación $2x^2 - 3x - 2 = 0$, una de sus respuestas es:
a) -2 b) -3 c) 3 d) 2 e) NA

36. Resolver la ecuación $(x-4)(x+5)+8=0$, una de sus respuestas es:
a) -2 b) -3 c) 3 d) 4 e) NA

37. Resolver la ecuación $(x-4)(x+5)(x+1)=0$, una de sus respuestas es:
a) -2 b) -3 c) 3 d) 4 e) NA

38. Resolver la ecuación $x^2-5x+6=0$, una de sus respuestas es:
a) -2 b) -3 c) 3 d) 4 e) NA

39. Resolver la ecuación $x^2-9=0$, una de sus respuestas es:
a) -2 b) -3 c) 3 d) 4 e) NA

40. Resolver la ecuación $x^2-16=0$, una de sus respuestas es:
a) -2 b) -3 c) 3 d) 4 e) NA

41. Si una raíz de la ecuación $x^2+4x+a=0$, es 5. Hallar el valor de $"a"$

a) -42 b) -43 c) -44 d) -45 e) NA

42. Resolver la ecuación $2x^2-32=0$, una de sus respuestas es:

a) -2 b) -3 c) 3 d) 4 e) NA

43. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+y=7 \end{cases}$, una de sus respuestas es:

a) -2 b) -3 c) 2 d) 4 e) NA

44. Resolver la ecuación $2x^2-7x+3=0$, una de sus respuestas es:

a) -2 b) -3 c) 3 d) 4 e) NA

45. Resolver la ecuación $(x+5)(2x+1)-x(2x-10)=10$, una de sus respuestas es:

a) -12 b) -13 c)14 d) 15 e) NA

46. Resolver la ecuación $(x-4)(x+5)-22=0$, una de sus respuestas es:

a) -2 b) -3 c) 3 d) 6 e) NA

47. Las edades de Pedro y Juan suman 17 años, Juan y Luis suman 19 años y Pedro y Luis 18 años. ¿Qué edad tienen Luis?.

a)8 b) 9 c) 10 d) 11 e) NA

48. Resolver la ecuación $\sqrt{2x+1}=3$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) NA

49. Si 30 obreros realizan una obra en 60 días, ¿cuántos obreros culminarán la misma obra en 120 días?.

a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) NA

50. Por la compra de 10 libros pago 240.¿ cuánto pagare por la compra de 8 libros?.

a) 190 b) 191 c) 192 d) 193 e) NA

51. Sea : $x*y=x.y+x+y \quad hallar \quad (2*5)*2$

a) 51 b) 52 c) 53 d) 54 e) NA

52. Sea : $x * y = \sqrt{x} + y \quad hallar \quad (9 * 6) * 2$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) NA

53. Sea : $x^2 * y^2 = (x + y)(x - y) \quad hallar \quad (9 * 4) * 2$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) NA

Anexo II
MISELANIA DE EJERCICIOS

1. Sean los conjuntos de números naturales

   $A=\{1,2,3,4,5\}$

   $B=\{1,3,5,7\}$

   $C=\{2,4,6,8\}$

   Hallar:

   $(A\cap B)^c\cup C^c$

2. Sean los conjuntos:

   $A=\left\{\sqrt{2x+1}\in N/0\le x\le 8\right\}$

e) $B=\left\{x^2/x\in Z,-2\le x<3\right\}$

   Expresar por extensión

3. El conjunto A tiene el doble de elementos de B, si ambos tienen la cuarta parte de elementos comunes de lo que tiene B, además entre A y B tienen 22 elementos. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto A.

4. Sea el conjunto:

   $A=\{1,2,\{2,3\},3,\{3,4\},4,5\}$

   Indicar que enunciado es verdadero o falso

   $\{1,4\}\in A$

   $\{2,3\}\in A$

   $\{\{2,3\},4\}\subset A$

5. Sean los conjuntos de números naturales

   $A=\{1,2,3\}$

   $B=\{2,3,4\}$

   $C=\{3,4,5\}$

   Hallar:

   $(A\cap B)^c\cup C^c$

6. El conjunto A tiene el triple de elementos de B, si ambos tienen la tercera parte de elementos comunes de lo que tiene A, además entre A y B tienen 80 elementos. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto B?

7. Evaluar la siguiente expresión:
$$p \rightarrow (p \rightarrow q)$$

8. La siguiente expresión:
$$p \rightarrow (\approx q \rightarrow r)$$
Es falsa, calcular los valores de verdad de p, q, r

9. Sean los subconjuntos de números naturales
$$A = \{1,2,3,4,5\}$$
$$B = \{1,3,5,7\}$$
$$C = \{2,3,4,6,8\}$$
Hallar:
$$(A \cap B)^c \cup C^c$$

10. Sea el conjunto:
$$A = \left\{ \sqrt{x+1} \in N / 0 \leq x < 5 \right\}$$
Expresar por extensión

11. Si la expresión: $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow p$
Es falsa, determinar los valores de verdad de p, q, r

12. Elaborar el circuito lógico de la expresión:
$$[(p \rightarrow q)] \rightarrow r$$

13. Sea la ecuación de segundo grado:
$$x^2 - 4x - 1 = 0, \quad con \quad raices \quad x_1 y\, x_2 \quad hallar:$$
$$x_1^2 + x_2^2$$

14. Resolver las ecuaciones:

a. $\frac{3x+1}{x-2} = \frac{3x+5}{x+7}$

b. $(x-1)(2x+2) - (x-1)(x-3) = 0$

15. Sean $\log 2 = a \qquad \log 3 = b \quad hallar: \quad 16^{2x+5} = 81^{x-1}$

16. Hallar el valor de "x"

$((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^x = 4$

17. Sea la ecuación : $x^2 - 7x + p = 0$

Hallar el valor de "p", tal que $x_1 + 3x_2 = 13$

18. Sea la ecuación de segundo grado:

$2x^2 - 6x + 5 = 0 \quad con \quad raices \quad x_1 \; y \; x_2 \quad hallar: \quad x_1^2 + x_2^2$

19. Sean $\log 2 = a \qquad \log 3 = b \quad hallar: \quad \log_6 72$

20. Sean los intervalos de números reales:

$A = [1 \; ; \; 8] \qquad\qquad B = [4 \; ; \; 10>$

Hallar: $A^c \cup B^c$

21. Sean las funciones:

$f = \{(1,3), (3,4), (5,7), (7,9)\}$

$g = \{(1,-3), (3,-4), (5,-7), (7,-9)\}$

Hallar:

$f+g; \quad f-g; \quad f.g; \quad \frac{f}{g}$

22. Sea la proporción geométrica:

$\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \quad ademas \quad a^2 + b^2 = 39 \quad hallar: "a"$

23. Sea la ecuación de segundo grado:

$2x^2 - 8x + 5 = 0 \quad con \quad raices \quad x_1 \; y \; x_2 \; hallar: x_1^2 + x_2^2$

24. Sean $\log 2 = a \quad \log 3 = b \quad hallar: \ \log_6 48$, en términos de a y b.

25. Sean los intervalos de números reales:

$A = [1\,;8]$ $\qquad\qquad$ $B = [4 \quad ; 10 >$

Hallar: $A^c \cup B^c$

26. Sean las funciones:

$f = \{(1,3),(3,4),(5,7),(7,9)\}$

$g = \{(1,3),(3,-4),(5,7),(7,-9)\}$

Hallar:

$f+g; \quad f-g; \quad f.g; \quad \dfrac{f}{g}$

27. Sea la proporción geométrica:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2} \quad ademas \quad a^2 + b^2 = 26 \quad hallar: "b"$

28. Sea el conjuntos de dígitos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Se eligen tres dígitos sin reemplazo para formar un número. Hallar

a. El total de números mayores a 600
b. El total de números mayores a 300 pero menor a 700
c. El total de números que contenga al número 1

29. El área de un círculo es 900 metros cuadrado, si el radio se incrementa en un 20%. Hallar la nueva área.

30. Por la compra de un artefacto recibo dos descuentos sucesivos del 20% y 30%, pagando 1500 nuevos soles. ¿Cuál es el precio inicial del artefacto.

31. A una reunión asisten 12 varones y 8 damas. Se eligen a 5 personas, determinar:

a. El total de grupos de 3 varones y 2 mujeres.
b. El total de grupos en la cual aparezca una persona determinada.
c. El total de grupos en la cual una persona determinada no aparezca.

32. Sea el conjuntos de dígitos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

33. Se eligen tres dígitos sin reemplazo para formar un número. Hallar:
    a. El total de números menores a 600
    b. El total de números mayores a 400 pero menor a 800
    c. El total de números que contenga al número 3

34. El área de un círculo es 900 metros cuadrado, si el radio se incrementa en un 30%. Hallar la nueva área.

35. Por la compra de un artefacto recibo dos descuentos sucesivos del 20% y 30%, pagando 1800 nuevos soles. ¿Cuál es el precio inicial del artefacto.

36. A una reunión asisten 12 varones y 8 damas. Se eligen a 5 personas, determinar:
    a. El total de grupos de 2 varones y 3 mujeres.
    b. El total de grupos en la cual aparezca una persona determinada.
    c. El total de grupos en la cual una persona determinada no aparezca.

37. Sean los intervalos de números reales:

$A = [2, 6>$ $\quad B =< 4, 8]$ $\quad hallar: A^c \cup B^c$

38. Sea la ecuación de segundo grado

$3x^2 - 6x + M = 0$, con raíces $x_1 \quad y \quad x_2$

Hallar el valor de M, tal que: $x_1 + 2x_2 = 10$

39. El área de un triángulo es 800 metros cuadrados, si su base disminuye en 20% y su altura aumenta en un 10%. Hallar su nueva área.

40. Sea la razón geométrica $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, además $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{3} - 1$, hallar el valor de "a"

41. Sean los dígitos $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, se eligen 4 dígitos sin reemplazo para formar un número. Determinar:
    a. El total de números pares que empiecen con el digito 3.
    b. El total de números que contenga al número 3

42. Sean los subconjunto de números reales:

$A = [3 \quad , \quad 10 > \quad B = [1, 5]$

Hallar:

a. $(A \cup B)^c$

b. $A^c \cup B^c$

43. Sea la ecuación de segundo grado

$3x^2 - 12x + M = 0$, con raíces $x_1 \quad y \quad x_2$

Hallar el valor de "M", tal que: $x_1^2 + x_2^2 = 50$

44. Sea la proporción geométrica:

$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \quad ademas \quad 2a - b = 4 \quad hallar: \quad "a + b"$

45. El área de un triángulo es 700 metros cuadrados. Si la base se incrementa en un 40% y su altura disminuye 30%. Hallar su nueva área.

46. Sean los dígitos $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, se eligen 4 dígitos sin reemplazo para formar un número. Determinar:
   a. ¿Cuántos números son mayores a 3000?
   b. ¿Cuántos números son mayores a 4000 pero menores a 8000?
   c. ¿Cuántos números pares contiene al 4 como primer digito?

47. Sean los conjuntos:

$$A = \{x / x \in N, \quad 1 < x < 4\}$$

$$B = \{x / x \in N, \quad 0 < x < 3\}$$

Hallar:

a. $A^c \cup B^c$

b. $(A \Delta B)$

48. Resolver la ecuación:

$$(x + 5)(x - 3) + (x - 5)(x + 3) + 6x = 0$$

49. Sea la ecuación:

$$x^2 - px + q = 0$$

$$Hallar \quad p \quad y \quad q \quad tal \quad que: x_1^2 + x_2^2 = 20 \quad y \quad x_1 = 2x_2$$

50. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 9x + 21y = -11 \\ 3x - 3y = -7 \end{cases}$$

51. Sean las proporciones geométricas:

$$\frac{x+13}{2} = \frac{y+15}{3} = \frac{z+14}{5} \quad ademas \quad x + y + z = 48 \quad hallar :"x"$$

52. Sean los intervalos:

$A = < 2 , 6 >$

$B = [3 ; 6]$

Hallar:

$$A^c \quad ; \quad B - A \quad ; \quad A \cap B$$

53. Sean los conjuntos:

$A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{3,5,7,8,11\}$

Hallar la relación:

$$R = \{(x, y) \in AxB / 5 < x + y \leq 10\}$$

$$Sea : -2 < x < 5; \quad hallar\ la\ \text{var}\ iacion\ de : \frac{2x-3}{5}$$

54. Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2(x-3) + 5 > 3x - 7 \\ 6x + 3(3 - x) > 2x + 8 \end{cases}$$

55. Sea la proporción geométrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{7} \quad ademas \quad 3a + 2b = 92 \quad hallar :"a + b"$$

56. Sean los intervalos:

$A = < 2 ; 6]$

$B = [4 ; 8]$

Hallar:

$$A^c \quad ; \quad A - B \quad ; \quad A \cap B$$

57. Sean las funciones:

$f = \{(-1,-2),(3,4),(5;-6),(7,8)\}$

$g = \{(-1,-3),(-3,7),(5,12),(7,2)\}$

$Hallar: f+g; \quad f-g; \quad f.g; \quad \frac{f}{g}$

58. Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2(x+3)+5 > 3x+7 \\ 6x+3(3-x) > 2x+8 \end{cases}$$

59. Sean los subconjunto de números reales:

$A = [3 \ , \ 8>$ $\qquad$ $B = [1, \quad 5]$

60. Hallar: $(A-B)^c$

61. Sea la proporción geométrica:

$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} \quad ademas \quad a+b+c = 40 \quad hallar: \quad "a+3b+15c"$

62. El área de un círculo es 900 metros cuadrados. Si su radio disminuye en un 20%. Hallar su nueva área.

63. En una reunión asisten 12 varones y 8 mujeres. Se eligen a 4 personas para formar un grupo de trabajo. Determinar:
    a. El total de grupos formados de solo varones.
    b. El total de grupos formados de 3 varones y 1 mujer.
    c. El total de grupos formados en la cual una mujer determinada no aparezca.
    d. El total de grupos formados en la cual aparezca un varón y una mujer determinada.

64. Sean los subconjunto de números reales:

$A = [3 \ , 10>$ $\qquad$ $B = [1, 5]$

Hallar: $(A-B)^c$

65. Sea la ecuación de segundo grado

$x^2 + mx - 14 = 0$, con raíces $x_1 \quad y \quad x_2$

Hallar el valor de "m", tal que: $x_1 - x_2 = 9$

66. Sea la proporción geométrica:

$$\frac{12}{a}=\frac{13}{b}=\frac{14}{c} \quad ademas \quad 2a+3b+4c=238 \quad hallar: \quad a.b.c$$

67. El área de un círculo es 900 metros cuadrados. Si su radio se incrementa en un 20%. Hallar su nueva área.

68. En una reunión asisten 14 varones y 6 mujeres. Se eligen a 4 personas para formar un grupo de trabajo. Determinar:

    a. El total de grupos formados de solo varones.
    b. El total de grupos formados de 3 varones y 1 mujer.
    c. El total de grupos formados en la cual una mujer determinada no aparezca.
    d. El total de grupos formados en la cual aparezca un varón y una mujer determinada.

69. Sean los subconjunto de números reales:

$$A=[-1 \quad , \quad 5> \qquad B=[-3, \quad 2]$$

Hallar: $A^c \cup B^c$

70. En una reunión de varones, se contabilizaron 36 saludos de mano. ¿cuántas personas asistieron a la reunión?.

71. Por la compra de 2 artículos debo pagar S/.180. si por el primer artículo, recibo un descuento del 20%, por el segundo un descuento del 10%. ¿Cuál es el precio inicial de los dos artículos.

72. Sea la ecuación de segundo grado

$x^2+mx-14=0$, con raíces $x_1 \quad y \quad x_2$

Hallar el valor de "m", tal que: $x_1-x_2=9$

73. Sea la proporción geométrica:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7} \quad ademas \quad a+b+c=40 \quad hallar: \quad "a+3b+15c"$$

74. Un cuadrado de 4 mts de lado. Calcular su perímetro, que se forma al unir los puntos medios de sus lados (usar la formula límite de una progresión geométrica).

BIBLIOGRAFÍA

Cárdenas de la Cruz, Víctor Daniel (2017). Matemática básica. Lima: Universidad de Lima

Figueroa García, Ricardo (2019). Análisis matemático 1. Lima: RGM.

Figueroa García, Ricardo (2018). Análisis matemático 1. Lima: RGM.

Saal, Riqueros, César A. (2012). Matemática básica I: problemas. Lima: Gómez.

Venero Baldeón, Armando (2012). Matemática básica. Lima: GEMAR.

Vera Gutiérrez, Caros (2015). Matemática: Lima: Moshera Editorial.